# שיטות כמותיות

# תוכן העניינים

1. הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות ..... 1
2. גבול של פונקציה ..... 27
3. חישוב נגזרת של פונקציה ..... 43
4. משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי ..... 56
5. כלל לופיטל ..... 67
6. חקירת פונקציה ..... 73
7. מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה ..... 102
8. בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון) ..... 107
9. אינטגרלים מיידיים ..... 120
10. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" ..... 125
11. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 127
12. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 131
13. אינטגרלים של פונקציות רציונליות ..... 134
14. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות ..... 139
15. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) ..... 150
16. בעיות מקסימום ומינימום כלכליות ..... 172
17. שימושי הנגזרת ..... 174
18. מטריצות ..... (ללא ספר)
19. מטריצות המשך ..... (ללא ספר)
20. בעיות גדילה ודעיכה ..... 176
21. גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר ..... 189
22. גיאומטריה אנליטית - המעגל ..... 214
23. וקטורים גיאומטריים ..... 233

# תוכן העניינים

24. וקטורים אלגבריים ..... 247
25. פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות ..... 289
26. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות ..... 299
27. דטרמיננטות ..... 312

# שיטות כמותיות

## פרק 1 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

### תוכן העניינים


1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה ..... 1
9. הרכבת פונקציות ..... 3
10. הפונקציה ההפוכה ..... 6
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית ..... 10
12. פונקציה מפוצלת ..... 12
13. תרגילים משולבים ..... 13
14. מבוא לתורת הקבוצות ..... 17

# תחום הגדרה של פונקציה

## שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $y = x^3 - x^2 - 4x + 1$

2) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

3) $y = \frac{4x+1}{x^2+1}$

4) $y = \frac{1}{x^3 - x}$

5) $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$

6) $y = \sqrt{x-4}$

7) $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

8) $y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$

9) $y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

10) $y = \ln\left(x^2 + x - 2\right)$

11) $y = \log x + \frac{1}{\log x}$

12) $y = e^{x^2+x+1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) $y=\log_x(x+4)$

## תשובות סופיות

1) כל $x$.

2) $x\neq\pm2$

3) כל $x$.

4) $x\neq 0,1,-1$

5) $x\neq 2,-1$

6) $x\geq 4$

7) $x\leq -2\ ,\ x\geq 1$

8) כל $x$.

9) $-1<x<1$

10) $x<-2\ ,\ x>1$

11) $x>0\ ,\ x\neq 1$

12) כל $x$.

13) $x>0\ ,\ x\neq 1$

# הרכבת פונקציות

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x-4$ , $g(x)=x^2$ , $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

**2)** נתון $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו את $f(f(x))$ עבור $x=3$.

**3)** נתון $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$, $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$.

חשבו את $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

**4)** נתון $g(x)=\ln x$, $f(x)=x^2-7x$.

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

**5)** נתון $g(x)=\ln x$, $f(x)=e^{2x}$.

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=2$.

**6)** נתון $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$.

חשבו את $f(g(x)), g(f(x))$.

**7)** נתונות הפונקציות

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונות הפונקציות

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\le -3$
2. $n\ge 1$
3. $n$ אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

**9)** נתון $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x))))}_{n\,\text{Times}}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. -3 ב. 4 ג. $x^2-4$ ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. $x$

2) 3

3) 69/13

4) -10

5) 4

6) $f\left(g\left(x\right)\right)=\begin{cases}\frac{1}{x+3} & x>4\\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4\\ \left(3x\right)^2 & x\le 0\end{cases}$ , $g\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases}x^2+3 & x<2\\ 3x^2 & -2\le x\le 0\\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$

7) $z(x)=\begin{cases}4x^2+16x+12 & x<-1.5\\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1\\ x-3 & -1<x<0\\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0\end{cases}$

8) א. $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3}\\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1\\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1\end{cases}$ ב. $n\le -3$

9) $f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הפונקציה ההפוכה

## שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

**1)** $f(x)=\frac{x-1}{3}$

**2)** $f(x)=\frac{x+1}{x}$

**3)** $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

**4)** $f(x)=x^2-4 \quad (x\geq 0)$

בשאלות **5-7**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

**5)** $f(x)=x+\frac{1}{x}$

**6)** $f(x)=x^2-x$

**7)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

בשאלות **8-10**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

**8)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

**9)** $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$

**10)** $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

**11)** נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

**12)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ; $f(x)=\frac{x-1}{3}$

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ ; $f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ; $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

ד. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ; $f(x)=x^2-4$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

ב. $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

ג. $f:(1,\infty)\to(0,1]$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

**14)** תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$.
תהי $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ ו- $g$ חח"ע אז $h$ חח"ע.
ב. אם $f$ ו- $g$ חח"ע אז $h$ על.
ג. אם $f$ ו- $g$ על אז $h$ על.
ד. אם $f$ ו- $g$ על אז $h$ חח"ע.
ה. אם $f$ חח"ע ו- $g$ על אז $h$ חח"ע.
ו. אם $f$ חח"ע ו- $g$ על אז $h$ על.
ז. אם $f$ על ו- $g$ חח"ע אז $h$ חח"ע.
ח. אם $f$ על ו- $g$ חח"ע אז $h$ על.

**15)** תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$.
תהי $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
נתון כי $h$ על.
הוכיחו או הפריכו:

א. $f$ חח"ע.
ב. $f$ על.
ג. $g$ חח"ע.
ד. $g$ על.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ \ g:B\to C$ .

תהי $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$ .

נתון כי $h$ חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. $g$ על.

ב. $f$ על.

ג. $g$ חח"ע.

ד. $f$ חח"ע.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f^{-1}(x)=3x+1$ , כל $y$ .

2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$ , $y\neq 1$

3) $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$ , $y\neq 3$

4) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$ , $y\geq -4$

5) לא חח"ע. תמונה: $y\leq -2$ או $y\geq 2$ .

6) לא חח"ע. תמונה: $y\geq -\frac{1}{4}$ .

7) לא חח"ע. תמונה $0\leq y\leq 1$ .

8) כן חח"ע. תמונה: $y>0$ . פונקציה הפוכה: $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$ .

9) לא חח"ע. תמונה: $y\geq 2.3$ או $y\leq -1.3$

10) כן חח"ע. תמונה: $y\neq 1$ . פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$ .

11) לא חח"ע. תמונה: $y\geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$ ; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ , טווח $\mathbb{R}$ , תמונה: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ , טווח ותמונה: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ; על.

ד. תחום הגדרה $[0,\infty)$ , טווח $\mathbb{R}$ , תמונה: $[-4,\infty)$ ; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$ , תמונה: $(0,1]$ ; לא על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה: $(0,1]$ ; על.

ג. תחום הגדרה $(1,\infty]$ , טווח $(0,1]$ , תמונה: $(0,0.5)$ ; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה זוגית ואי זוגית

## שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות **1-6** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

**1)** $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

**4)** $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=2^x$ **6)** $y=\ln x+x^2$

**7)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $z(x)=f\left(x^2\right),\ k(x)=-f(x)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות $k,z$, האם היא זוגית או אי-זוגית.

**8)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.
טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.
טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.
איזו טענה נכונה?

**9)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$, $z(x)=-g(-4x)\cdot f\left(x^4\right)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות $z,k$, האם היא זוגית או אי-זוגית.

**10)** הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

שאלות **1-6** : זוגית : **2,3** ; אי- זוגית : **1,4** ; כללית : **5,6**.

**7)** $k$ אי-זוגית, $z$ זוגית.

**8)** טענה ב'.

**9)** $k$ אי-זוגית, $z$ זוגית.

**10)** שאלת הוכחה.

# פונקציה מפוצלת

## שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

**1)** $y=|x-2|$

**2)** $y=3|x+1|$

**3)** $y=x^2+2|x-1|$

**4)** $y=\frac{|x|}{x}$

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

א. חשבו $f(1),\ f(4),\ f(-4),\ f(0),\ f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

## תשובות סופיות

**1)** $y=\begin{cases} x-2 & x\ge 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$

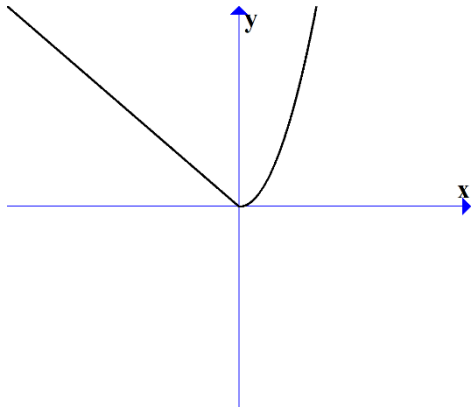
**2)** $y=\begin{cases} 3x+3 & x\ge -1 \\ -3x-3 & x<-1 \end{cases}$

**3)** $y=\begin{cases} x^2+2x-2 & x\ge 1 \\ x^2-2x+2 & x<1 \end{cases}$

**4)** $y=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

**5)** א. $f(1)=1,\ f(4)=16,\ f(-4)=4,\ f(0)=0,\ f(7)=\text{undefind}$

ב.




ג. כללית.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילים משולבים

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & x>1 \\ x^5+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.
קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**3)** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

**4)** נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$ .
נתון ש- $f$ מונוטונית עולה ממש, ואילו $g$ מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f(g(x))$ .
איזו טענה נכונה?
א. $h$ יורדת חלש.
ב. $h$ עולה ממש.
ג. $h$ עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. $h$ אינה חסומה בהכרח.

**5)** נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<0\\ -x^2-2x-1 & x\ge 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}x+4 & x\le 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$ .
תהי $h(x)=f(g(x))$ .
א. מצאו את $h$ בקטע $[-2,0)$.
ב. קבעו האם $h$ חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבעו האם $h$ חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבעו האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.
* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

**6)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ : $f(x)=x^3,\ g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$ .
קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f(g(x))$ היא:
א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.

**7)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ : $f(x)=x^3,\ g(x)=-\lfloor x\rfloor$ .

א. בדקו את מונוטוניות $z(x)=f(g(x))$ .

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x)=g(f(x))$ .

ג. בדקו האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b \Leftarrow f(a)\ge f(b)$ אז הפונקציה $f$ יורדת חלש.

**8)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ $\begin{array}{l} f(x)=(3\lfloor x\rfloor)^3+27\lfloor x\rfloor \\ g(x)=f(x)+x^3-28 \end{array}$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $f$ עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה $g$ עולה ממש וחח"ע.

**9)** מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$ .

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

**10)** חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

**2)** אף טענה אינה נכונה.

**3)** טענה ב' נכונה.

**4)** טענה א' נכונה.

**5)** א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

**6)** א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

**7)** א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ; תחום הגדרתה: כל $x$.

**10)** ראו באתר.

**11)** א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבוא לתורת הקבוצות

## סיכום כללי

### הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית $\Rightarrow$. $A \Rightarrow B$ פירושו: אם $A$ מתקיים, אז גם $B$ מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית $\Leftrightarrow$ (אם ורק אם). $A \Leftrightarrow B$ פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או' $\vee$.
- הסימן 'וגם' $\wedge$.

### קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציינו שהאיבר $a$ שייך לקבוצה $A$ נרשום $a \in A$.
  - על מנת לציינו שהאיבר $a$ אינו שייך לקבוצה $A$ נרשום $a \notin A$.

### שוויון בין קבוצות

שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.

פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow \left(x \in A \Leftrightarrow x \in B\right)$.

### הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- $\phi$, כלומר $\phi = \{\ \}$.

### קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

### עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה $A$ נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

### תת-קבוצה

אם קבוצה $A$ מוכלת בקבוצה $B$, נסמן $A \subseteq B$.

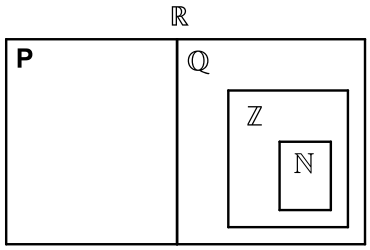
תמיד מתקיים:

- $A \subseteq A$
- $\phi \subseteq A$

עבור שוויון קבוצות נדרוש $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ או $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

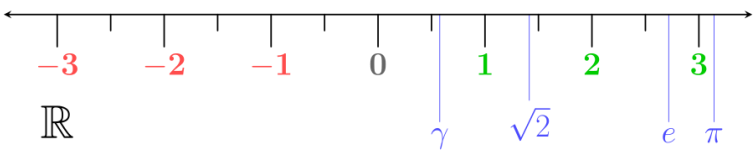
### קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ....\}$.
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ....\}$.
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| \; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$.
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט **P**).
- קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}$ (כוללת את $\mathbb{Q}$ ואת **P**).




### ציר המספרים

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:





כתב ופתר – גיא סלומון ©

### קטעים על ציר המספרים

| תיאור מילולי | סימון קבוצות | סימון קטעים |
|---|---|---|
| הקטע הפתוח מ- $a$ ל- $b$ לא כולל נקודות הקצה | $\{x \mid a < x < b\}$ | $(a,b)$ |
| הקטע הסגור מ- $a$ ל- $b$ וכולל נקודות קצה | $\{x \mid a \le x \le b\}$ | $[a,b]$ |
| קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $a$ ולא את $b$ | $\{x \mid a \le x < b\}$ | $[a,b)$ |
| קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $b$ ולא את $a$ | $\{x \mid a < x \le b\}$ | $(a,b]$ |
| הקרן הפתוחה מ- $a$ עד $\infty$ ללא $a$ | $\{x \mid a < x < \infty\}$ | $(a,\infty)$ |
| הקרן הסגורה מ- $a$ עד $\infty$ כולל $a$ | $\{x \mid a \le x < \infty\}$ | $[a,\infty)$ |
| הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד $b$ ללא $b$ | $\{x \mid -\infty < x < b\}$ | $(-\infty,b)$ |
| הקרו הסגורה מ- $-\infty$ עד $b$ כולל $b$ | $\{x \mid -\infty < x \le b\}$ | $(-\infty,b]$ |

### קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תתי-הקבוצות של $A$, נקראת קבוצת החזקה של $A$, ומסומנת $P(A)$.

### איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות $A$ ו- $B$ פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות $A$ ו- $B$ פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים-המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cap B$.

| תכונות האיחוד | תכונות החיתוך |
|---|---|
| $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| $A \cup \phi = A$ | $A \cap \phi = \phi$ |
| $A \subseteq A \cup B$ | |


כתב ופתר – גיא סלומון ©

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

**הפרש קבוצות**

ההפרש של שתי קבוצות $A$ ו-$B$, המסומן $A-B$, הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי $A$ שאינם איברי $B$, כלומר $A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$.

**משלים של קבוצה**

ההפרש $U-A$ מסומן ב- $A^c$ או ב- $A'$ ונקרא **המשלים** של $A$, כאשר $U$ היא הקבוצה האוניברסלית.

**כללי דה-מורגן**

- $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
- $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

**דיאגרמת ון**

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## שאלות

**1)** רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y: \ (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y: \ (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z: \ xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0 \ , \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ ( $k$ ו- $n$ טבעיים).

**2)** רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$ , הוא $x > 2$ או $x < -2$ .

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל $x$ .

ג. לכל מספר טבעי $n$ , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר $x$ , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$ .

**3)** רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ |x| \le 4\}$

**4)** הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$ .

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

**6)** נתונה הקבוצה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

| | | |
|---|---|---|
| א. $5\in A$ | ב. $2\in A$ | ג. $\{2\}\in A$ |
| ד. $\{2\}\subseteq A$ | ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ | ו. $\phi\in A$ |
| ז. $\phi\subseteq A$ | ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ | ט. $\{2,4\}\subseteq A$ |
| י. $\{2,4\}\in A$ | יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ | יב. $\{2,5\}\subseteq A$ |
| יג. $\{2,5\}\in A$ | יד. $\{1,4\}\in A$ | |

**7)** מצאו שתי קבוצות, $A$ ו-$B$, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

**8)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ , $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה $X$:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

**9)** הוכיחו: $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ .

רשמו את:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$ ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

**11)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$ , $B=(-2,1)$ , $C=\{x\in R\,|\,0\le x\le 4\}$ , $D=\{x\,|\,2^x=0\}$ .

רשמו את:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$ ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

**12)** נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$ , $B=\{5,6,7,8,9\}$ , $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשבו את $(A-B)-C$.

ב. חשבו את $A-(B-C)$.

**13)** נתון: $B=\{13,15,17\}$ , $A=\{12,15,18\}$ , $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

הדגימו את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

**14)** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

**15)** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל-$\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\ \vee\ x>4\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$ ב. $A\cup B$

ג. $A^c$ ד. $A\cap B^c$

ה. $A^c\cap B$ ו. $A\cup B^c$

ז. $A^c\cup B$ ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$

ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

**18)** תהיינה $X,Y,Z$ קבוצות כלשהן.

טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.

טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.

טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.

איזו טענה נכונה לכל בחירה של $X,Y,Z$?

**19)** נתונה הקבוצה $A=\{\phi,4,\{4\}\}$.

רשמו את $P(A)$.

**20)** הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. לכל קבוצה $A$ מתקיים $A\subseteq P(A)$.

ב. לכל קבוצה $A$ מתקיים $A\not\subseteq P(A)$.

**21)** הוכיחו כי: $A\subseteq B\ \Rightarrow\ P(A)\subseteq P(B)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. לכל $x$ ולכל $y$ מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל $x$ קיים $y$, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל $x$ ולכל $y$ קיים $z$ כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל $x$ חיובי ולכל $y$ חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל $n$ טבעי המספר $n^3-n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

**2)** א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

**3)** א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים.

ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

**4)** א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

**5)** הקבוצות $A$, $B$ ו- $C$ שוות זו לזו, והקבוצות $D$ ו- $E$ שוות זו לזו.

**6)** א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

**7)** $B=\{\{1,2\},1,2\}$, $A=\{1,2\}$.

**8)** א. $A, C$ ב. $E, D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

**9)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** א. $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$ ב. $A\cap B=\{4,6,8\}$

ג. $(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$.

**11)** א. $A\cup B=(-2,4)$ ב. $A\cap B=\phi$

ג. $(A\cup B)\cap C=(0,4)$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$.

**12)** א. $\phi$ ב. $\{4,5,6\}$.

**13)** ללא פתרון.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** א. $A^c=(-\infty,1)$ ב. $B^c=[1,4]$ ג. $C^c=[1,4]$

ד. $D^c=(-\infty,1]\cup[3,4]$.

**16)** ראו סרטון.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** טענה ב.

**19)** $P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{4\},\{\{4\}\},\{\phi,4\},\{4,\{4\}\},\{\phi,\{4\}\},\{\phi,4,\{4\}\}\}$.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 2 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי ..... (ללא ספר)
2. הצבה ..... 27
3. צמצום ..... 28
4. הכפלה בצמוד ..... 29
5. גבולות טריגונומטריים ..... 30
6. פונקציה שואפת לאינסוף ..... 32
7. איקס שואף לאינסוף ..... 33
8. הגבול של אוילר ..... 35
9. כלל הסנדויץ ..... 36
10. גבול של פונקציה מפוצלת ..... 37
11. גבול לפי הגדרה ..... 40

# הצבה

## שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

## תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

10) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{x+1}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) $6$ 4) $n-1$ 5) $-3$

6) $32$ 7) $3$ 8) $27$ 9) $\frac{8}{17}$ 10) $\frac{1}{5}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) $4$

3) $-\frac{1}{12}$

4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{4}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $-\frac{8}{3}$

9) $\frac{1}{2}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

10) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$

11) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

12) $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

13) $\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

14) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 10x}$

15) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

16) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{2}$ 7) $\frac{1}{8}$ 8) $4$ 9) $\frac{1}{4}$

10) $-\frac{1}{2}$ 11) $\cos a$ 12) $-\sin a$ 13) $\frac{1}{\cos^2 a}$

14) $\frac{4}{10}$ 15) $\frac{1}{2}$ 16) $\frac{2}{\pi}$ 17) $1$

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\begin{cases} \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \\ \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} \\ \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \\ \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\pi n=0 \\ \cos\pi n=(-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a \\ \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin a \end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

## תשובות סופיות

1) $\phi$
2) $\phi$
3) $-\infty$
4) $\phi$
5) $-\infty$
6) $\infty$
7) $\infty$
8) $\phi$
9) $0$
10) $1$
11) $\phi$
12) $-\infty$
13) $-\infty$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# $x$ שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{2x+10}-\dfrac{x}{2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\left(\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{\dfrac{ax+1}{bx+2}}$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-4)^{10}(3x^2-1)^4}{x^2(2x-5)^{10}(x^3+1)^2}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(5\cdot 2^{x+2}+6\cdot e^{x+1}\right)-x\right]$

## תשובות סופיות

1) $0$ 2) $-\frac{\pi}{2}$ 3) $4$ 4) $-\infty$

5) $0$ 6) $-5$ 7) $1$ 8) $-1$

9) $-3$ 10) $1.5$ 11) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ 12) $\frac{1}{4}$

13) $0$ 14) $4$ 15) $\frac{1}{9}$ 16) $2$

17) $\ln 3$ 18) $e^{\frac{1}{3}}$ 19) $0$

20) אם $b\neq 0$: $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $a>0$, $b=0$: $\infty$. אם: $a<0$, $b=0$: $-\infty$.

21) $2.5$ 22) $\frac{k}{2}$ 23) $\frac{1}{2}$ 24) $-\frac{1}{2}$

25) $\frac{1}{2}$ 26) $\frac{a-b}{2}$ 27) $\frac{3^4}{2^{10}}$ 28) $\frac{5}{4}$

29) $\ln(6e)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הגבול של אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ):

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x$

## תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) $1$ 3) $e^2$ 4) $e^{-1}$ 5) $e^3$

6) $e$ 7) $e^{-12}$ 8) $e^{30}$ 9) $e$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# כלל הסנדוויץ'

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-10**:

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

**2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(2x+1)}{x}$

**3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$

**5)** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

**6)** $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\cos\left(\ln x^2\right)$

**7)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\arctan(2x-3)}{4x+\arctan(x-\ln x)}$

**8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

**9)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

**10)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

**11)** נתונה פונקציה $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , המקיימת $\lim\limits_{x\to 2}z(x)=4$ ,

ונתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$ , לכל $x$ .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}\ ,\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)\ ,\ \lim_{x\to 2}\tan(z(x))\ ,\ \lim_{x\to 2}f(x)$$

**12)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$ .

## תשובות סופיות

**1)** 0 **2)** 0 **3)** $\frac{3}{4}$ **4)** 3 **5)** 0

**6)** 0 **7)** $\frac{3}{4}$ **8)** 4 **9)** 1 **10)** 0

**11)** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=16$ , $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}=0$ ,

$\lim\limits_{x\to 2}\tan(z(x))=\tan 4$ , $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

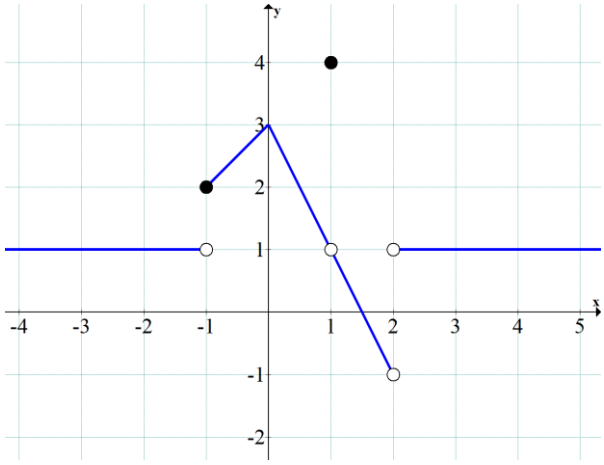
**12)** 0


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

**1)** להלן גרף של פונקציה:




חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 1.

ב. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3f-f^2\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3f-f^2\right)$ 1.

ג. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-f}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{4-f}$ 1.

**2)** נגדיר פונקציה $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ x^2-1 & 0<x<2\\ 1.5x-6 & x\ge 2\end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to 2}\left[4\left(f(x)\right)^2+10f(x)\right]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נגדיר פונקציה $f(x)$ : $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ \cos x & 0<x<\pi\\ -0.5 & x\ge\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to\pi}\left[2\left(f(x)\right)^2+3f(x)\right]$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

4) $(a=0),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{x} & x>0\\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$

5) $(a=1)\ ,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$

6) $(a=0)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

7) $(a=\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

8) $(a=-\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

9) א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $1.\lim_{x\to1} f(x)=1$ , $2.\ \lim_{x\to2} f(x)=\nexists$ , $3.\ \lim_{x\to-1} f(x)=\nexists$

ב. $1.\ \lim_{x\to1}\left(3f-f^2\right)=2$ , $2.\ \lim_{x\to-1}\left(3f-f^2\right)=2$

ג. $1.\ \lim_{x\to1}\frac{1}{4-f(x)}=\frac{1}{3}$ , $2.\ \lim_{x\to1}\frac{1}{1-f(x)}=\nexists$

2) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \lim_{x\to2} f(x)=-3$ ג. $6$

3) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \nexists\lim_{x\to\pi} f(x)$ ג. $-1$

4) $4$

5) $\phi$

6) $\phi$

7) $1$

8) $-1$

9) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול לפי הגדרה

## שאלות

בשאלות **1-6**, **על פי הגדרת הגבול**, הוכיחו:

**1)** $\lim_{x\to 2} 7x+14=28$

**2)** $\lim_{x\to 4} x^2+x=20$

**3)** $\lim_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

**4)** $\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

**5)** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-2}=1$

**6)** $\lim_{x\to \alpha} \sin x=\sin\alpha$

**7)** חשבו, **על פי הגדרת הגבול**: $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכיחו **על פי הגדרת הגבול** את מקרים **8-11**:

**8)** $\lim_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

**9)** $\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

**10)** $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

**11)** $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

**12)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=-5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f(x)<-4$.

**13)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f^2(x)>16$.

**14)** נניח $f$ פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to \infty} f(x)=0$.
הוכיחו שמתקיים $\lim_{x\to \infty} \sqrt{f(x)}=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתון הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.

מצאו ערך של $M>0$, עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו $M$, כך ש-$\forall x>M:\ |f(x)-L|<0.1$).

**16)** נגדיר את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

א. $\lim_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim_{x\to 2.5}f(x)$ ג. $\lim_{x\to\pi}f(x)$

**17)** בהינתן הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{2x+4}{x+11}=\frac{1}{2}$, מצאו $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$ מתקיים.

**18)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$, אז $\lim_{x\to\infty}(f^2(x)-g^2(x))=0$.

ב. אם $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$, אז $\lim_{x\to x_0}(f^2(x)-g^2(x))=0$.

ג. אם $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=L$, אז: הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-$L$ או $-L$.

ד. אם הגבולות $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ ו-$\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיימים, אז גם הגבול $\lim_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

**19)** יש להוכיח כי $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3}\neq 1$ לפי ההגדרה.

**20)** יש להוכיח כי $\lim_{x\to 4}\frac{2x+1}{x+10}\neq 1$ לפי ההגדרה.

**21)** הוכיחו שאם $\lim_{x\to 0}f(x)=3$, אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x)>2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**22)** הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x) > L$ , אז קיימת סביבה נקובה של $x_0$ שבה $f(x) > L$ .

## תשובות סופיות

**7)** $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר : GOOL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 3 - חישוב נגזרת של פונקציה

### תוכן העניינים


1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה ..... 43
3. תרגילים נוספים לפי סוגים ..... 47
4. גזירה סתומה ..... 50
5. כלל השרשרת ..... 52
6. גזירה לוגריתמית ..... 55

# תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות **27-35** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

**1)** $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

**2)** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

**3)** $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

**4)** $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

**5)** $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

**6)** $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

**7)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

**8)** $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**9)** $f(x)=x\cdot\ln x$

**10)** $f(x)=x^2\cdot\ln x$

**11)** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

**12)** $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

**13)** $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**14)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**15)** $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**16)** $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

**17)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

**18)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

**19)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

**20)** $f(x)=\sin(x^3)$

**21)** $f(x)=\cos(x^4)$

**22)** $f(x)=\sin^3 x$

**23)** $f(x)=\tan(x^2)$

**24)** $f(x)=\ln(\cos x^2)$

**25)** $f(x)=\arcsin(2x+3)$

**26)** $f(x)=\arctan(x^2)$

**27)** $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

**28)** $f(x)=(\sin x)^x$

**29)** $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

**30)** $y=x^{\ln x}$

**31)** $y=\sqrt[x]{x}$

**32)** $y=x^{\sqrt{x}}$

**33)** $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

**34)** $y=(x^2+1)^x$

**35)** $y=(x+1)^{(x+1)}$

**הערה:** בשאלות **28** ו-**29** נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\quad f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

21) $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\quad f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

22) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\quad f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

23) $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\quad f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

24) $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\quad f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

25) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\quad f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

26) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\quad f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

27) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $f'(x)=(\sin x)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$

29) $f'(x)=(\cos x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$

30) $y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

31) $y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$

32) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

33) $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

34) $y'=\left(x^{2}+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)+\frac{1}{x^{2}+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

35) $y'=\left(x+1\right)^{(x+1)}\left[\ln\left(x+1\right)+1\right]$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילים נוספים לפי סוגים

## שאלות

### הנגזרת של פונקציית חזקה

**1)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

**2)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

### הנגזרת של קבוע

**3)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

### הנגזרת של סכום והפרש

**4)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

### הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

**5)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

### הנגזרת של אחד חלקי איקס

**6)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

### הנגזרת של מכפלה

**7)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

### הנגזרת של מנה

**8)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

### הנגזרת של שורש

**9)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

**1)**

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

**2)**

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

**3)** א. 0 ב. 0

**4)** א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

**5)** א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

**6)** א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

**7)** א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

**8)** א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

**9)** א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# גזירה סתומה

## שאלות

**1)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

**2)** גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

**3)** גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

**4)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את $y'$ בנקודה $(1,2)$.

**5)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את $y'$ בנקודה בה $y=0$.

**6)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

**7)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

**8)** נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך $y^n$ בנקודה בה $y=1$.

**9)** נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.

א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך $y$ אחד ויחיד ומצאו אותו.

ב. חשבו את $y''$ בנקודה בה $x=1$.

**10)** נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של $x$.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

8) $-1$

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# כלל השרשרת

## שאלות

**1)** נתונה פונקציה $f(x)$ , המקיימת $f'(4)=10$ .

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$ .

חשבו את $g'(2)$ .

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה $f(x)$ . נגדיר פונקציה חדשה

$z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)-f(4x+1)$ .

חשב ואת $z'(x)$ .

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$ .

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{f^2(\ln x)}$ .

חשבו את $z'(e)$ .

**3)** נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$ .

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$ .

חשבו $g'(100)$ .

**4)** נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ .

ידוע כי $f'(1)=4$ , $f(1)=1$ .

חשבו $g'(1)$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.

ידוע כי $f'(0)=1$ , $f(0)=2$.

חשבו $g'(1)$.

**6)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\dfrac{4}{x}\right)+1}$.

ידוע כי $f'(4)=2$ , $f(4)=1$.

חשבו $g'(1)$.

**7)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$ , $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

**8)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f''''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x)=(f(x))^4$.
קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $40$

2) א. $z'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-f'(4x+1)\cdot 4$ ב. $z'(e)=3\frac{3}{4}$

3) $\frac{17}{80}$

4) $36$

5) $\frac{8}{9}$

6) $44$

7) $-2$

8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גזירה לוגריתמית

## שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

1) $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

2) $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

3) $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

## תשובות סופיות

1) $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

2) $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

3) $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 4 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

### תוכן העניינים


1. המשיק ..... 56
2. בעיות משיקים ..... 58
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק ..... 60
4. הנורמל ..... 64
5. זווית שבין שתי עקומות ..... 65
6. נוסחת הקירוב הלינארי - דיפרנציאל שלם ..... 66

# המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x)=2x^3-7x$ , בנקודה $(2,2)$.

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ , בנקודה $x=-2$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ , כאשר $a>0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע $a$.

**3)** הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x)=3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

**4)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ , בנקודה $(1,15)$, הוא $21\ln 3$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ , בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**6)** לאילו ערכי $k$ ישיק הישר $y=-5x+6$ , לגרף הפונקציה

$f(x)=x^3-2x^2-4x+k$ ?

לכל ערך $k$ כזה מצאו את נקודת ההשקה.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-4x+5$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x=3$ ו- $x=1$.

ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-2}$.
מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+5$.
מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של $135°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

**10)** פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב- $0$ ומקיימת $f(0)=0$.
ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ היא $30°$.
חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

**11)** מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$, בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $17$ ב. $4$

**2)** $a=2$

**3)** $(1,3)$

**4)** $a=2,\ b=-1$

**5)** $a=2,\ b=-2$

**6)** לערך $k=6$, בנקודה $x=1$ ; לערך $k=\frac{158}{27}$, בנקודה $x=\frac{1}{3}$.

**7)** א. ראו באתר. ב. $\alpha=63.43°,\ \beta=116.56°$

**8)** $x=5,\ x=-1$

**9)** $x=1,\ x=\frac{1}{3}$

**10)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**11)** $\alpha=33.69°,\ \beta=90°$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות משיקים

## שאלות

**1)** הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**2)** הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**3)** הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצאו את $a$ ו- $c$.

**4)** הישר $y=x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**5)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $x=e$.

בשאלות **6-7** מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

**6)** $y=x^2-2x+1$, $(2,-3)$

**7)** $y=\sqrt{x}$, $(-3,1)$

**8)** מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y=x^2$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2-5$.

**9)** הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצאו את $k$ ואת נקודת ההשקה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתון כי $f$ גזירה לכל $x$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל $x$.

ב. הישר $2y=10x+11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x=-1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x=-5$.

## תשובות סופיות

**1)** נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y=4x+9$.

**2)** נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b=4$.

**3)** נקודת ההשקה היא $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$.

**4)** נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y=x+1$.

**5)** משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{e}x$.

**6)** $(0,1)$ , $y=-2x+1$ ; $(4,9)$ , $y=6x-15$

**7)** המשיק $(9,3)$ , $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$.

**8)** $y=-2x-1$ , $y=2x-1$

**9)** $k=1.5$ , נקודת ההשקה $(1,1)$.

**10)** א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ , בנקודה $x=-1$ .

**2)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ , ששיפועו $2$ .

**3)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$ , בנקודה $x=0$ .

**4)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ , בנקודה $x_1=1$ .

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ , בנקודה $y=2$ , הוא $-4$ .
מצאו את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**6)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ , היוצרים זווית של $135°$
עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

**7)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ , ששיפועו $-2$ .

**8)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ ,
בנקודה $x_1=2$ .

**9)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ , בנקודה $(1,6)$ , הוא $-6$ .
מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ , ואת משוואת המשיק.

**10)** נתונה הפונקציה $y=e^{2x}+3ex$ , והעבירו לה משיק בנקודה $x=2$ .
מצאו את משוואת המשיק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ , בנקודה $x=0$ .

**12)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^{x}-e^{2x}$ ,
בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$ .

**13)** לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$ .
מצאו את משוואת המשיק.

**14)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\cdot\ln(x^2+1)$ , בנקודה $x=1$
.

**15)** הגרפים של $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק.
מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

**16)** מצאו את משואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$ , בנקודה $(3,4)$.

**17)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$xy^2+y-x=xy$ , דרך הנקודה $(1,1)$.

**18)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$ ,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**19)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$ ,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**20)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$e^{xy^2}+y=y^2-1$ ,
דרך הנקודה $(0,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^{y}=xy^{2}+x^{2}$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y=24x+22$

2) $y=2x-3$

3) $y=1$

4) $y=-12x+9$

5) $a=2,\quad y=-4x-2$

6) $y=-x+1\frac{1}{3},\quad y=-x-1\frac{1}{3}$

7) $y=-2x+8$

8) $y=\frac{11}{16}x-\frac{30}{16}$

9) $a=6,\ b=2,\quad y=-6x+12$

10) $y=\left(2e^4+3e\right)x-3e^4$

11) $y=3x+1$

12) $y=\left(-e^2+e\right)x+e^2,\quad y=\left(e-1\right)x+e$

13) $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$

14) $y=\left(\ln 2+1\right)x-1$

15) $y=\frac{1}{e}x$

16) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

17) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

18) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

19) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{5}{6}$

20) $y=\frac{4}{3}x+2$

21) א. $(1,0)$, $(0,0)$ ב. בראשית הצירים: $y=-x$, המשוואה השנייה: $y=x-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הנורמל

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-2}$ , בנקודה $(3,2)$.

**2)** מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו-$(2,4)$.

**3)** משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+1$ , בנקודה מסוימת, היא $4y+x=6$.
מצאו את הנקודה.

## תשובות סופיות

**1)** $y=-2x+8$

**2)** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

**3)** $(2,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# זווית שבין שתי עקומות

## שאלות

**1)** מצאו את הזווית בין הפונקציות $y=f(x)=x^2$ ו- $y=g(x)=\frac{1}{x}$.

**2)** מצאו את הזווית בין המעגל $x^2+y^2=8$ והפרבולה $y^2=2x$.

**3)** הוכיחו שהאליפסה $x^2+2y^2=8$ וההיפרבולה $x^2-y^2=2$ נחתכות בזווית ישרה.

## תשובות סופיות

**1)** $71.57°$

**2)** $71.56°$

**3)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

## שאלות

**1)** חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

**2)** חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\ln 2, \sqrt[3]{9}$

## תשובות סופיות

**1)** $\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5}$

**2)** $\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 5 - כלל לופיטל

### תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף ..... 67
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף ..... 69
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף ..... 70
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף ..... 71
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל ..... 72

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות בשאלות **1-3** (ביטויים רציונאליים):

**1)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$ **2)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות בשאלות **4-8** (ביטויים אי-רציונאליים):

**4)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ **5)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$ **8)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **9-12** (פונקציות חזקה):

**9)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ (a,b>0)$

**11)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ **12)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות בשאלות **13-15** (פונקציות לוגריתמיות):

**13)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$ **14)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$ **15)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{20}{17}$ 3) $n-1$ 4) $4$ 5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{2}$ 7) $\frac{5}{6}$ 8) $-\frac{3}{2}$ 9) $1$ 10) $\ln\frac{a}{b}$

11) $\frac{1}{2}$ 12) $\frac{1}{6}$ 13) $-\frac{1}{2}$ 14) $2$ 15) $1$

16) $\frac{1}{2}$ 17) $\frac{1}{2}$ 18) $\infty$ 19) $0$ 20) $0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

**גבולות מהצורה** $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln x$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2}e^{-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} x\cdot \ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 3^{+}} \left(x^{2}-9\right)\cdot \ln\left(x-3\right)$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) $0$ 3) $0$ 4) $0$

5) $0$ 6) $6$ 7) $\frac{5}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) $-\frac{1}{2}$

4) $\frac{1}{3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה:** $\infty^0$, $0^{\pm\infty}$ , $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

## תשובות סופיות

1) $e$
2) $1$
3) $1$
4) $1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

## שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{1}{4}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 6 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

1. מושגי יסוד ..... 73
2. חקירת פולינום ..... 74
3. חקירת פונקציה רציונלית ..... 75
4. חקירת פונקציה מעריכית ..... 79
5. חקירת פונקציה לוגריתמית ..... 82
6. חקירת פונקציה עם שורשים ..... 86
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט ..... 87
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית ..... 90
9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות ..... 94
10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות ..... 96
11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה ..... 101

# הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=x(x-9)^2$ **2)** $f(x)=x^4-2x^3$

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 ו-9.

נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.

תחום עלייה: $x<3$ or $x>9$, ירידה: $3<x<9$.

תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.

נקודת פיתול: $(6,54)$.

**2)** תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 ו-2.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.

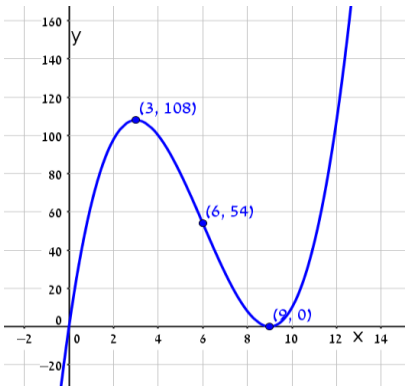
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.

תחום קמירות: $x>1$ or $x<0$, קעירות: $0<x<1$.

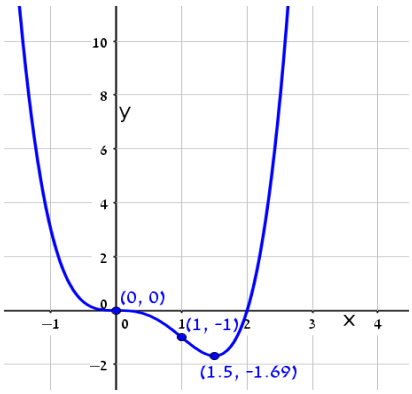
נקודות פיתול: $(1,-1)$, $(0,0)$.

## גרפים

**1)**




**2)**





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה רציונלית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

2) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

6) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

7) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

8) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

**הערות**

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $0<x<2$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>2$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $x<0 \ \ or \ \ 0<x<3$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $x<-1 \ \ or \ \ x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $-1<x<\frac{1}{2} \ \ or \ \ x<-1$, קעירות: $x>\frac{1}{2}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=-2,\ x=2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$.
תחום עליה: $x>\sqrt{12} \ \ or \ \ x<-\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x\neq\pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $-2<x<0 \ \ or \ \ x>2$, קעירות: $0<x<2 \ \ or \ \ x<-2$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עליה: $x>-1 \ \ or \ \ x<-3$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $-1<x<0 \ \ or \ \ x<-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1$, עם ציר ה- $x$: $-1$.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2,\ x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה- $x$: $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x>5$ or $2.78<x<5$ or $x<0.36$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

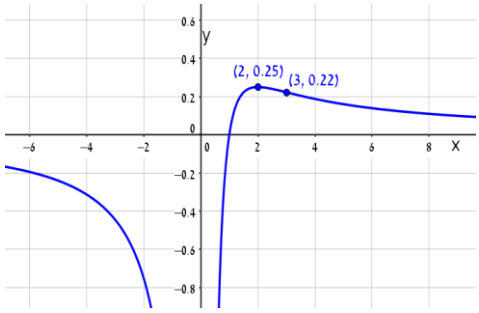
**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה- $x$: $x=1,\ x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

**8)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1,\ x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

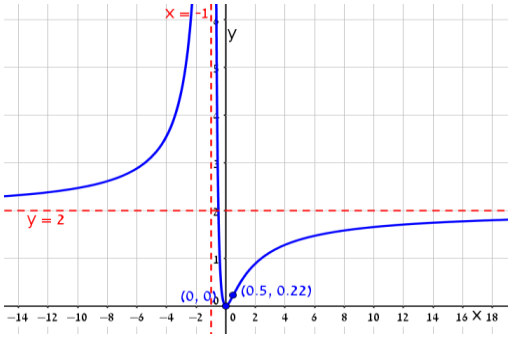

כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

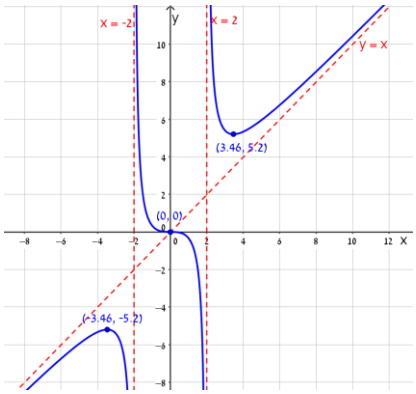
1)



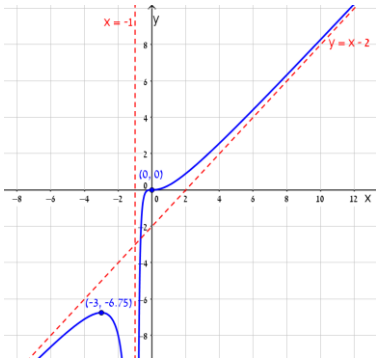

2)



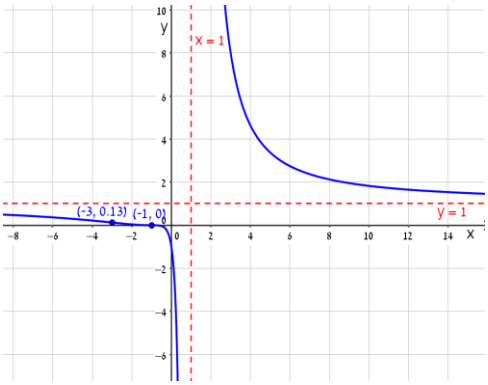

3)



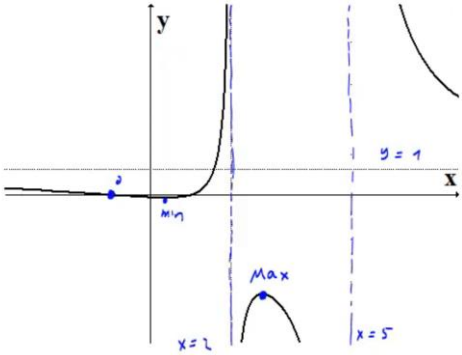

4)



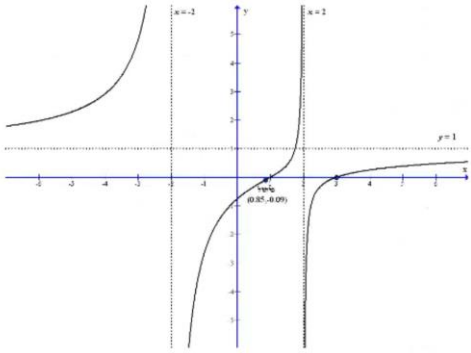

5)



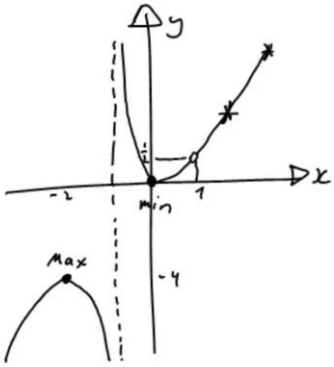

6)




7)



8)





כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה מעריכית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x-e^{x}$

2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

3) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=x\cdot e^{-2x^{2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1$, עם ציר ה- $x$: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל $x$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0$ $or$ $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

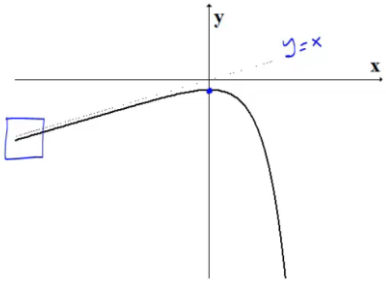
**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $-2$.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1$ $or$ $x>2$, ירידה: $-1<x<0$ $or$ $0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0$ $or$ $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2}$ $or$ $x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0$ $or$ $x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
$0<x<\sqrt{\frac{3}{4}}$ $or$ $x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

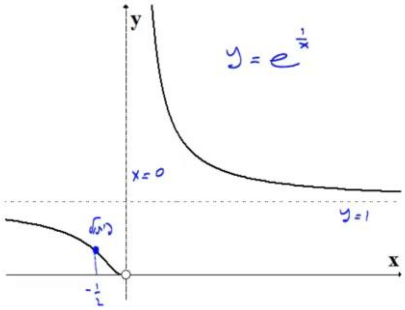

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

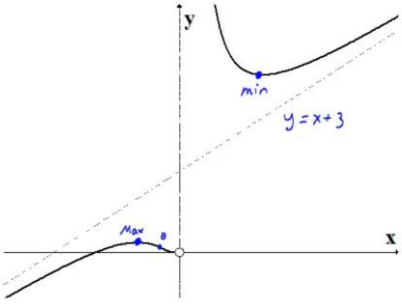
1)



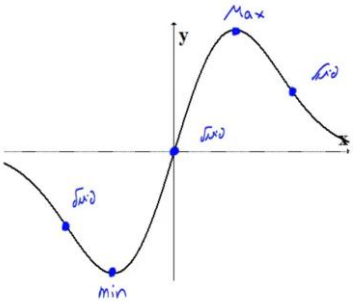

2)




3)




4)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה לוגריתמית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

4) $f(x)=x\cdot\ln x$

5) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

6) $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

7) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**הערה**

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $x=e^{-3},\ x=e^{1}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.

נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: $x=e^{-0.5},\ x=e^{1.5}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.

נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ x\neq 1$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: אין, עם ציר ה- $x$: אין.

אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right),(e,2)$.

תחום עלייה: $e^{-1}<x<1\ \ or\ \ x>e$, ירידה: $x<e^{-1}\ \ or\ \ 1<x<e$.

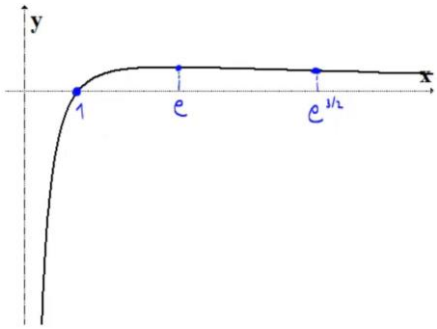
נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.

תחום קמירות: $0<x<1\ \ or\ \ 1<x<5.15$, קעירות: $x>5.15$.

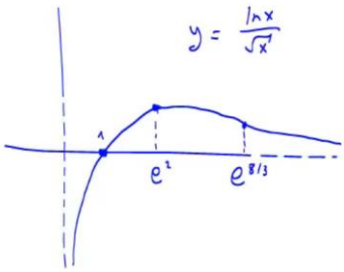

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

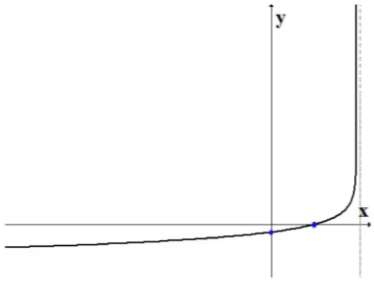
(1



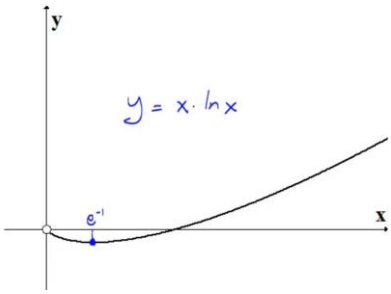

(2



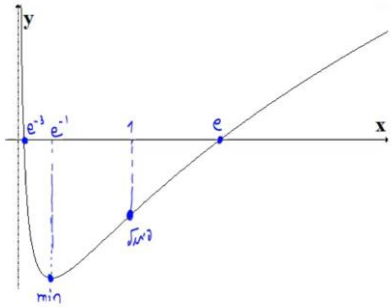

(3



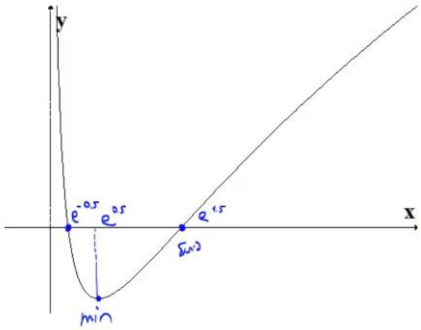

(4



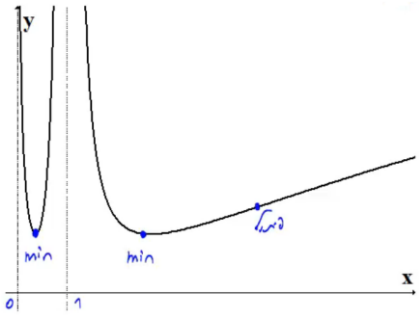

(5




(6




(7





כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה עם שורשים

## שאלה

**1)** חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

## תשובה

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 1, עם ציר ה- $x$: אין.

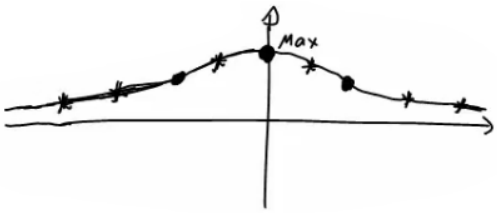
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.

נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ $or$ $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

2) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

4) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: 0 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5},0.326\right)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0<x<\frac{2}{5}$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>\frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2,0.41)$.
תחום קמירות: $x<-0.2$, קעירות: $x>0 \ \ or \ \ -0.2<x<0$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 1, עם ציר ה- $x$: 1- או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$, מינימום: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום עלייה: $x>1 \ \ or \ \ -1<x<0$, ירידה: $x<-1 \ \ or \ \ 0<x<1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל $x$.

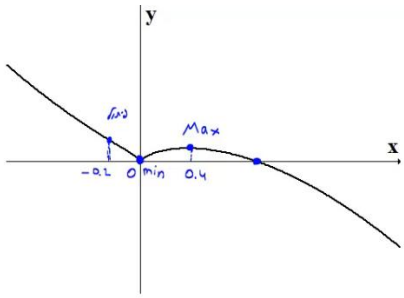
**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1$, עם ציר ה- $x$: $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,-1)$.
תחום עלייה: $x>1 \ \ or \ \ 0<x<1$, ירידה: $x<-1 \ \ or \ \ -1<x<0$.
נקודות פיתול: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<1$, קעירות: $x>1 \ \ or \ \ x<-1$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: $-1.5$, עם ציר ה- $x$: 3.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$,
משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\infty$, ו- $y=-1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3,0)$.
תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3 \ \ or \ \ x<2$.
נקודות פיתול: $(3,0)$.
תחום קמירות: $2<x<3$, קעירות: $x>3 \ or \ \ x<2$.

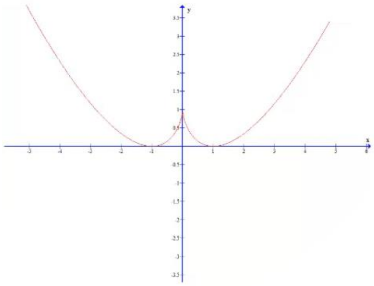

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

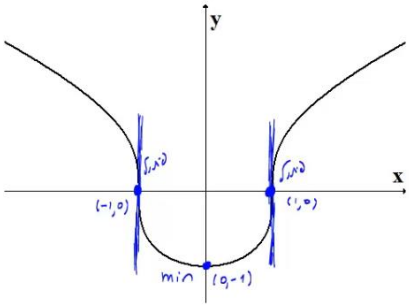
1)



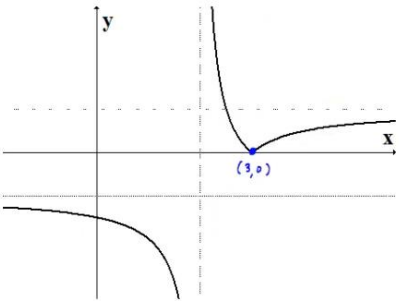

2)



3)




4)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה טריגונומטרית

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**2)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0,\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=(\sin x+1)\cdot\cos x$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0,\pi]$.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**8)** $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$, $[0,2\pi]$

**9)** $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$, $[0,\pi]$

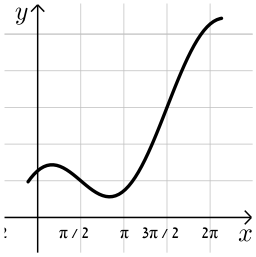

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $0<x<2\pi$.

ב. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$ , $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ , $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ .




ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

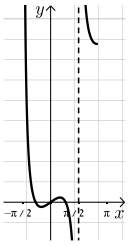
ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

**2)** א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$ .

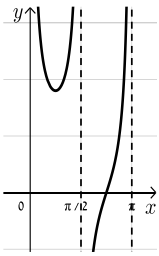



ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$ ,

קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

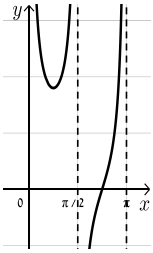
**3)** א. $0<x<\frac{\pi}{2}$ ; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.




ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ , $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi$ , $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=0$ .

**4)** א. $(\pi,0),(0,-2)$.




ב. $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right)$, $\max(0,-2)$, $\max(2\pi,-2)$, $\max\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right)$

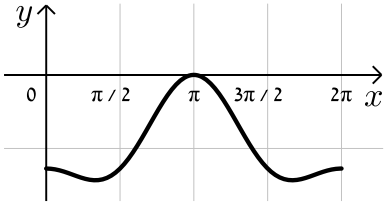
ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$ , $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ , יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$ , $0<x<\frac{\pi}{3}$. גרף:


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** א. $(0,1)$ , $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

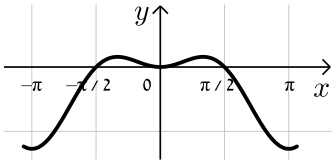
ב. $(1.5\pi,0),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),(0,1)$

ד. 2 פתרונות.



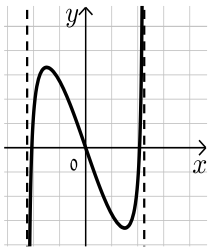

**6)** א. חיתוך: $(0,0),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ , קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה,

$\min(0,0),\ \max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ קצה.




**7)** א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$ .

ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$ , $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$ .




**8)** נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 7, עם ציר ה- $x$ : $x=7$ , $x=\frac{5\pi}{3}$ , $x=\frac{\pi}{3}$ .

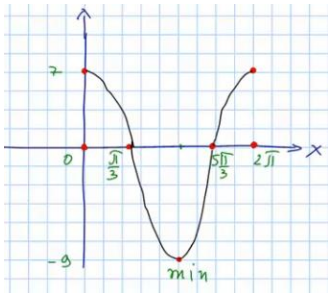
נקודות קיצון: מינימום: $(\pi,-9)$ , מקסימום: $(2\pi,7)$ , $(0,7)$.

נקודות פיתול: $x=\frac{5\pi}{3}$ , $x=\frac{\pi}{3}$ .

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$ ,

קעירות: $0<x<\frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$ .

תחום עלייה: $x>3$ , ירידה: $2<x<3$ or $x<2$ .




**9)** נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 2, עם ציר ה- $x$ : $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=\frac{\pi}{4}$ .

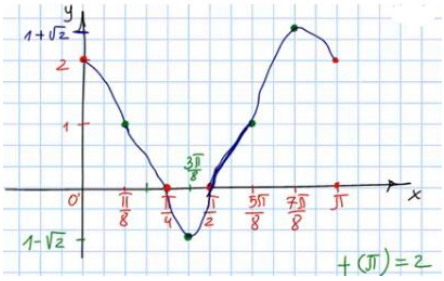
נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)$ , מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right)$.

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$ , ירידה: $\frac{7\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{3\pi}{8}$ .

נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{8},1\right)$ , $\left(\frac{\pi}{8},1\right)$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$ ,

קעירות: $\frac{5\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{\pi}{8}$ .





כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x) = x - 2\arctan x$

**2)** $f(x) = \arcsin(\sin x)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

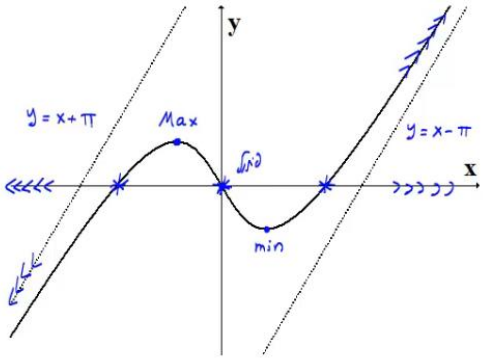
## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-1,0.575)$, מינימום: $(1,-0.575)$.
תחום עלייה: $x>1$ or $x<-1$, ירידה: $-1<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<0$.

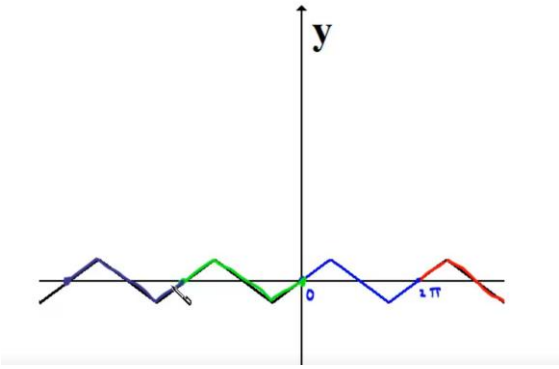
**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית.
מחזוריות: כן, ממחזור $2\pi$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$: 0, עם ציר ה- $x$: $x=0,\ \pi,\ 2\pi$.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$.
תחום עלייה: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
נקודות פיתול: אין.

### גרפים

**1)**




**2)**





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה – שאלות כלליות

## שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ , וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבוע $a$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ , וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבועים $a,b$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ , וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבוע $a$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ , וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבועים $a,b$.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה $x=3$ הוא 33.
מצאו את $a$.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ .
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12.
מצאו את $a,b$.

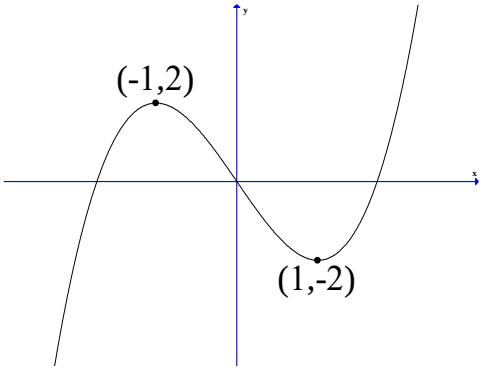
7) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^3+x^2}{2x^3+x+6}$ .
ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{x}$ .
ידוע שהישר $y=0.5x+1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$ ואת $b$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x^2+ax+6}$.
ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את $a$.

שאלות **10-17** מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:




**10)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

**11)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

**12)** מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

**13)** עבור איזה ערך של $k$, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

**14)** עבור איזה ערך של $k$, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

**15)** עבור איזה ערך של $k$, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

**16)** האם קיים ערך של $k$, עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

**17)** מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

**18)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2)=4$.
נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי $f$ עולה. הוכיחו כי $z$ יורדת.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**19)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$ .

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{x}$ .

א. האם $z$ עולה או יורדת בנקודה $x=e$ ?

ב. נתון בנוסף כי $f$ שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של $z$ ?

**20)** נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=\sqrt{f(x^2)+4}$ .

מי מהבאים בהכרח נכון?

א. $z$ עולה לכל $x$ .

ב. $z$ יורדת לכל $x$ .

ג. $z$ עולה לכל $x>0$ .

ד. $z$ יורדת לכל $x>0$ .

**21)** נתונה פונקציה $f(x)$ , המקיימת $f'(1)=e$ .

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$ .

א. חשבו את $g'(e)$ .

ב. הוכיחו שהפונקציה $g$ עולה בנקודה $x=e$ .

חשבו את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$ .

**22)** הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- $x$ היא ב- $x=0$ .

נגדיר $g(x)=(f(x))^2$ . איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. אם $f$ עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ יש נקודת מינימום.

ב. אם $f$ יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ יש נקודת מינימום.

ג. אם $f$ עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$ אין נקודת קיצון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**23)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל $x$ ומקיימת $f''(x)=a\cdot f(x)$ , כאשר $a<0$ .

איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה** :

א. בתחום בו $f(x)$ שלילית , $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).

ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.

ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר $x$ בנקודה $(n,0)$ , אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=n$ הוא המקסימלי באותו התחום.

ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $a=-\frac{2}{3}$

2) $a=-4\ ,\ b=6$

3) $a=-\frac{1}{3}$

4) $a=-1\ ,\ b=3$

5) $a=1$

6) $a=\frac{2}{3}\ ,\ b=-1$

7) $a=8$

8) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=1$

9) $a=-7$

10) 1

11) 2

12) 3

13) $k<-2\ ,\ k>2$

14) $k=\pm 2$

15) $-2<k<2$

16) לא

17) $x<-1\ ,\ -1<x<1\ ,\ x>1$

18) א. $z'(0.5)=-16$ ב. שאלת הוכחה.

19) א. עולה. ב. יורדת.

20) ד

21) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

22) ג

23) ד


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

**1)** $8x^3 \le 3x^4 + 6x^2$ , $(-\infty < x < \infty)$

**2)** $x < 2\sin x$ , $\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right)$

**3)** $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$ , $(x > 0)$

**4)** $\ln(x+1) \le x$ , $(x \ge 0)$

**5)** נתון כי $f$ רציפה לכל $x \ge 0$ , $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$ , וכן $f(0) = 0$ .
הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 7 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

### תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה ..... 102
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי ..... 105
3. הוכחת אי שוויונים ..... 106

# מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

## שאלות

בשאלות **7-1** מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

**1)** $f(x)=x^3-3x^2+3x \quad (-1\le x\le 3)$

**2)** $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$

**3)** $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(20-x) \quad (-1\le x\le 20)$

**4)** $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x<1\\ (x-2)(x-3) & x\ge 1\end{cases} \quad \left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$

**5)** $f(x)=1+\left|9-x^2\right| \quad (-5\le x\le 1)$

**6)** $f(x)=\frac{x^2}{x+1} \quad (-5<x<-1)$

**7)** $f(x)=x^3-9x+1 \quad (-\infty<x<\infty)$

**8)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^x$ בתחום $x>0$.

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע $(0,0.5)$.
הוכיחו שדני טועה.

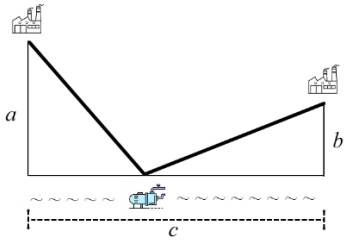
**9)** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x)=x^2+\left|\ln x\right|$.

**10)** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, ב- $\mathbb{R}$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ ,
ב- $\mathbb{R}$ וב- $[1,3]$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

**12)** לחברת מי עדן יש שני מפעלים.
האחד מרוחק $a$ ק"מ מהמעיין.
השני מרוחק $b$ ק"מ מהמעיין.
המרחק האופקי בין המפעלים הוא $c$ ק"מ.
החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין
בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.
מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?
הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזויות בין כל צינור למעיין שוות.




**13)** גליל חסום בכדור.
הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי $\sqrt{2}$ מרדיוס הבסיס שלו.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $(-1,-7)$ מינימום מוחלט, $(3,9)$ מקסימום מוחלט.

**2)** $(-1,0)$ מינימום מוחלט, $(5,0)$ מינימום מוחלט, $(2,3)$ מקסימום מוחלט.

**3)** $(0,0)$ מינימום מוחלט, $(20,0)$ מינימום מוחלט, $(8,48)$ מקסימום מוחלט.

**4)** $(2.5,-0.25)$ מינימום מוחלט, $(1,2)$ מקסימום מוחלט.

**5)** $(-3,1)$ מינימום מוחלט, $(-5,17)$ מקסימום מוחלט.

**6)** $(-2,-4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

**7)** אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.

**8)** א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. ב. שאלת הוכחה.

**9)** אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1+\ln 2)$.

**10)** מקסימום מוחלט $1$, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.

**11)** ב- $\mathbb{R}$ : $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.

ב- $[1,3]$ : $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, $(2,1)$ מקסימום מוחלט.

**12)** האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

**13)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

## שאלות

1) תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-$(a,b)$.
נניח שקיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש-$(f(c)-f(a))(f(b)-f(c))<0$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $d\in(a,b)$, כך ש-$f'(d)=0$.

2) פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.
וידוע כי $f(x)$ מקיימת $f(x)-f'(x)=f''(x)$ לכל $x$, וכן $f(a)=f(b)=0$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x$ בקטע.

3) הפונקציה $f$ גזירה פעמיים ומקיימת $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$ עבור פונקציה $g$ מסוימת.
הוכיחו: אם הפונקציה $f$ מקבלת את הערך $0$ בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.

4) תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה פעמיים בקטע $(a,b)$, כך ש-$f''(x)<0$ בקטע זה.
נתון כי $f(a)=f(b)=0$.
א. הוכיחו כי $f(x)>0$ בקטע $(a,b)$.
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הוכחת אי שוויונים

## שאלות

בשאלות **1-3** הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

**1)** $x^3e^{-x} \le \frac{27}{e^3}$ (לכל $x$)

**2)** $xe^{-\sqrt{x}} \le 1 \quad (x \ge 0),$

**3)** $0 \le x^2e^{x-1} \le 1 \quad (x \le 1),$

**4)** יהיו $a$ ו- $b$ מספרים חיוביים.
הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1)\ a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad (2)\ b(1-a) > \frac{1}{4}$$

**הערת סימון:** $[a,b] \Leftrightarrow a \le x \le b \quad ; \quad (a,b) \Leftrightarrow a < x < b \quad ; \quad [a,b) \Leftrightarrow a \le x < b$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 8 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

### תוכן העניינים


1. הסבר כללי על בעיות קיצון ..... 107
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים ..... 108
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור ..... 109
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים ..... 113
5. בעיות קיצון בהנדסת המרחב ..... 117
6. בעיות קיצון עם תשובה נתונה ..... 119

## שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$ .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות $x$ .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$ .
- נוודא שערך ה- $x$ מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "$y$ (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

## שאלות

**1)** נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

**2)** מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו,
הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

**3)** נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

**4)** $x$ ו- $y$ הם שני מספרים המקיימים: $x+6y=60$.
א. הביעו את $y$ באמצעות $x$.
ב. מה צריכים להיות המספרים $x$ ו- $y$,
כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הנ"ל?

## תשובות סופיות

**1)** $8,8,8$

**2)** $1$

**3)** א. $12,12,12$ ב. $8,12,16$ ג. מקרה א'.

**4)** א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30\ ,\ y=5$ ג. $M=22500$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בהנדסת המישור

## שאלות

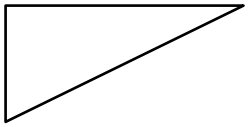
**1)** מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

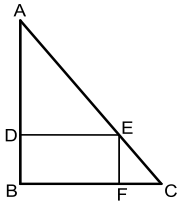
א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם $a$, מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

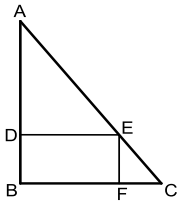
**3)** במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



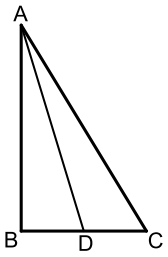
**4)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$)
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=$ 20 ס"מ , $BC=$ 16 ס"מ.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.




**5)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=a$ , $BC=b$.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



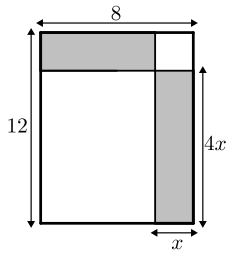

**6)** במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
AD הוא תיכון לניצב BC.
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



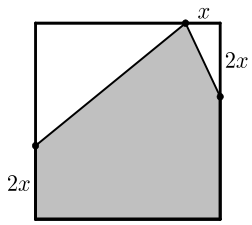


כתב ופתר – גיא סלומון ©

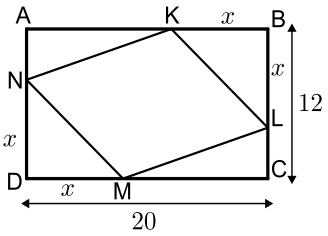
**7)** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של $x$ ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים.
מצאו את $x$, עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.




**8)** נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו $x$ על הצלע העליונה,
ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות,
כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו.
מצאו מה צריך להיות ערכו של $x$,
עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.




**9)** הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש:
$BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

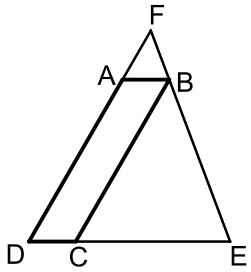



א. הביעו באמצעות $x$ את סכום שטחי המשולשים $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצאו מה צריך להיות $x$, כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?

**10)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF,
הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן:
$AB =$ 2 ס"מ, $AD =$ 8 ס"מ.
נסמן את אורך הצלע DE ב- $x$.



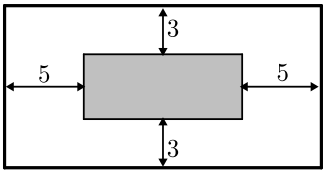

א. הביעו באמצעות $x$ את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את $x$, עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'.
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי,
כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון,
ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

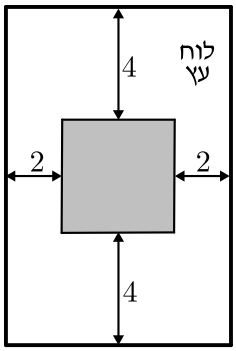



יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי,
ששאל אותו את השאלה הבאה:
"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות,
אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

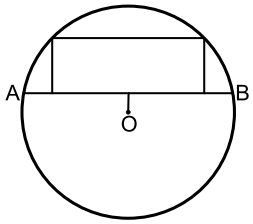
**12)** אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:
יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,
ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,
כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,
ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ,
אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי
שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).




א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

**13)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו
מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

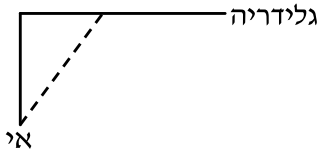



**14)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB
שמרחקו ממרכז המעגל הוא $a$.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

**15)** שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:
האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש
ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.
כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?
מצאו גם את המרחק המינימלי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק״מ מהחוף.
על החוף, במרחק של 3 ק״מ מהנקודה
הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה.
האדם שוחה במהירות של 8 קמ״ש
ורץ על החוף במהירות של 10 קמ״ש.
לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות,
כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?




**17)** אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו
ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC)
הוא 120 ₪ למטר,
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

## תשובות סופיות

**1)** $4\sqrt{3}$ ס״מ.

**2)** א. 2.5 ס״מ.

**3)** א. 6 ס״מ ו- 6 ס״מ ב. 18 סמ״ר. ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס״מ.

**4)** 80 סמ״ר $= S$.

**5)** $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

**6)** 4 ס״מ, 16 ס״מ.

**7)** $x=2.75$

**8)** $x=6$

**9)** א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. 128 סמ״ר $= S$.

**10)** א. $\mathrm{DF}=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6\ ,\ L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$

**11)** א. 6 ס״מ על 10 ס״מ. ב. 12 ס״מ על 20 ס״מ.

**12)** א. 11 ס״מ על 22 ס״מ. ב. $S=98$

**13)** 92 ס״מ.

**14)** $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

**15)** 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק״מ.

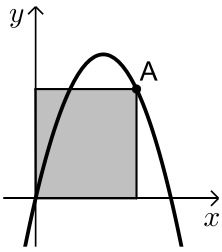
**16)** $2\frac{1}{3}$ ק״מ.

**17)** $4\cdot 6$

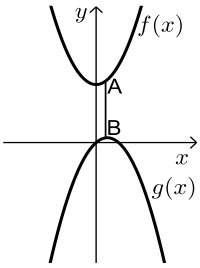

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

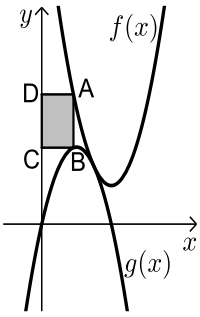
## שאלות




**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$ . מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

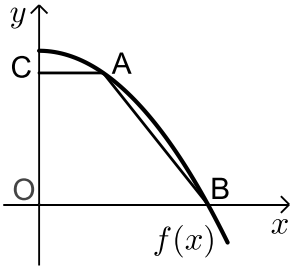



**2)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$ , כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ , בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.




**3)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$ .
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ , כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- $y$ , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור).
נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$ .

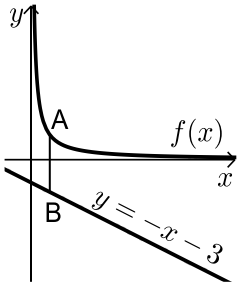
א. הביעו באמצעות $t$ את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של $t$ , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?




**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=36-x^2$ .
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- $x$ , שחותך את ציר ה- $y$ בנקודה C.
הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ , ו-O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

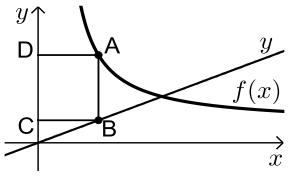



**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$ , ונתון הישר: $y=-x-3$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.




**6)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x)=\frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y=\frac{9x}{25}$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- $y$ , כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$ .

א. הביעו באמצעות $t$ את היקף המלבן ABCD.

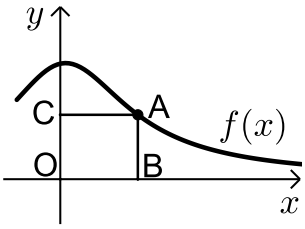
ב. מצאו את $t$ , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ונתון הישר $y=2x$ .

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.

מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



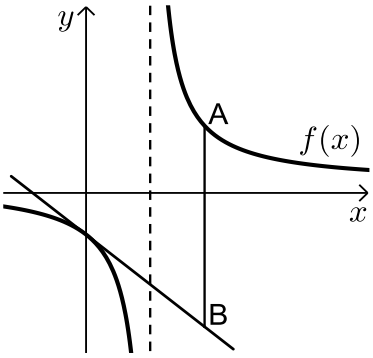

**8)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$ , בתחום: $x\ge 0$ .

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©




**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$.

א. מצאו את משוואת המשיק.

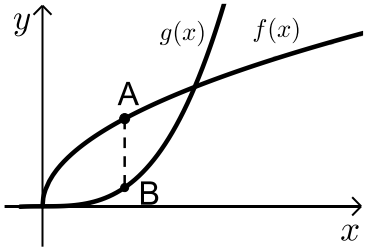
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

**10)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

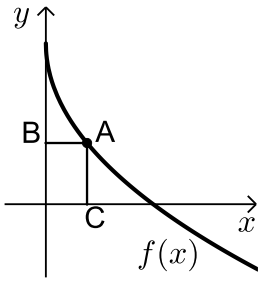
מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מַקְצֶה על הצירים הוא מינימלי.




**11)** נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?




**12)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=6-3\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$.

א. הביעו באמצעות $t$ את סכום הקטעים $AB+AC$.

ב. מצאו את ערכו של $t$, עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

**13)** נתונות הפונקציות $f(x)=1-x^2$ ו- $g(x)=bx^2$ $(b>0)$.

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.

מצאו את ערכו של $b$, שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $A(4,8)$

2) $A(0.5,12.25)$

3) א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$

4) א. $A(2,32)$ ב. $S=128$

5) $A(2,2)$

6) א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=$ 12.88 ס"מ

7) $1\cdot 2$

8) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$

9) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$

10) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

11) $A(1,2)$

12) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$

13) $b=1$

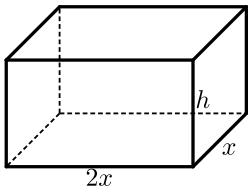

כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בהנדסת המרחב

## שאלות

**1)** נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

**2)** נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן,
שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה,
כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה $h$ וצלע המלבן הקטנה $x$
מקיימים: $x+h=9$.
מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה
כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

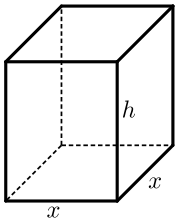



**3)** נתונה תיבה שגובהה הוא $h$ ובסיסה הוא ריבוע
שאורך צלעו היא $x$.
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים
$4x+h=63$.

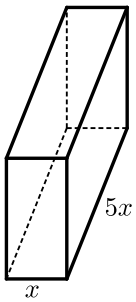
א. הביעו את $h$ באמצעות $x$.

ב. הביעו את שטח הפנים של התיבה
באמצעות $x$.

ג. מה צריך להיות ערכו של $x$, כדי ששטח
הפנים יהיה מקסימלי?



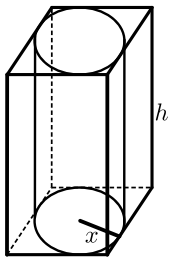

**4)** ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה
ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק.
יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5
מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך.
כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא
רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח
שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.




**5)** לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה,
דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים:
החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

**6)** מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא $k$,
מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©




**7)** באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$ וגובהו ב- $h$.
ידוע כי הסכום של $x$ ו- $h$ הוא 12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות $x$ את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות $x$

1. את נפח הגליל.
2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את $x$, עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

**8)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא $k$ ושטח המעטפת שלה הוא $S$.
הוכיחו כי $S < 2k^2$.

## תשובות סופיות

**1)** $4\cdot4\cdot4$ ס"מ.

**2)** בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

**3)** א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$

**4)** 3 ס"מ, 15 ס"מ ו- 5 ס"מ.

**5)** $8\cdot6\cdot3$ ס"מ.

**6)** $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $= V$.

**7)** א. $2x$ ב. 1. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ 2. $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$

**8)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון עם תשובה נתונה

## בעיות קיצון בהנדסת המרחב

**1)** נתונים שני מספרים חיוביים, $p$ ו- $q$, שסכומם $a$.

הראו, שכאשר מתקיים $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר $n$ ו- $m$ טבעיים).

**2)** הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם $\pi k$ סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא $\pi Rl$ , כאשר $l$ הוא הקו היוצר של החרוט)

## בעיית קיצון עם תנועה

**3)** מהירותו של רכב היא $v$ קמ"ש ועליו לנסוע דרך של $S$ ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200}+48$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# שיטות כמותיות

## פרק 9 - אינטגרלים מיידיים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 120
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 123

# אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

**1)** $\int 4dx$ **2)** $\int x^4 dx$ **3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

**4)** $\int \sqrt{x} dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ **6)** $\int 4x^{10} dx$

**7)** $\int (2x^2 - x + 1) dx$ **8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$ **9)** $\int (x^2+1)^2 dx$

**10)** $\int (x^2+1)(x+2) dx$ **11)** $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$ **12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$)

**13)** $\int (4x+1)^{10} dx$ **14)** $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$ **15)** $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

**16)** $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$ **17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$ **18)** $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

**19)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ **20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

**21)** $\int \frac{1}{4x} dx$ **22)** $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$ **23)** $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

**24)** $\int \frac{1}{4x-1} dx$ **25)** $\int \frac{x+3}{x+2} dx$ **26)** $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

**27)** $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

**28)** $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$

**29)** $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**30)** חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

**31)** $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$

**32)** $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

**33)** $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מציאת פונקציה קדומה

## שאלות

**1)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצאו את הפונקציה.

**2)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

**3)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

**4)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

**5)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

**6)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $-12$,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

**7)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=0$ ,

ונתון בנוסף כי לכל $x_0$ ממשי: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$ .

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.

חשבו את הנגזרת $\left(G(x)-f(x)\right)'$.

## תשובות סופיות

**1)** $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

**2)** $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

**3)** $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

**4)** $f(x)=x^2-6x+14$

**5)** $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

**6)** $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

**7)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

**8)** א. רציפה לכל $x$ .  ב. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$  ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$.  ה. 0


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 10 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 125

# אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

## שאלות

**הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \cot x dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2x dx$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

9) $\int e^{-2x^2}x dx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4x dx$

11) $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot \cos x dx$

12) $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3 dx$

14) $\int \sin\left(x^2+1\right)x dx$

15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{\left(\tan x\right)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$

21) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

24) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$

2) $\ln\left|\sin x\right|+c$

3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$

5) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$

6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$

7) $e^{x^2}+c$

8) $e^{\tan x}+c$

9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$

11) $\sin\left(\sin x\right)+c$

12) $\sin\left(\ln x\right)+c$

13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$

14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$

15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$

16) $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$

17) $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$

18) $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$

19) $2\sqrt{x^2+1}+c$

20) $\sqrt{2\sin x}+c$

21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$

22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$

23) $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

24) $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 11 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים..... 127

# אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

**1)** $\int xe^x dx$ **2)** $\int x^4 \ln x dx$ **3)** $\int x \sin x dx$

**4)** $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$ **5)** $\int x^2 \sin 4x dx$ **6)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

**7)** $\int \ln x dx$ **8)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ **9)** $\int \arctan x dx$

**10)** $\int \arcsin x dx$ **11)** $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$ **12)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

**13)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ **14)** $\int x \arctan x dx$ **15)** $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

**16)** $\int \ln^2 x dx$ **17)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ **18)** $\int e^x \cos x dx$

**19)** $\int e^{2x} \sin 4x dx$ **20)** $\int \sqrt{1-x^2} dx$ **21)** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

**22)** $\int x \tan^2 x dx$ **23)** $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

**24)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר $n$ טבעי.

**25)** חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

**26)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**27)** חשבו את $\int \cos^4 x dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**29)** חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

**30)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר $n$ טבעי.

**31)** חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

**32)** חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $xe^x - e^x + c$

2) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3) $x\cos x + \sin x + c$

4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

5) $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

6) $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

7) $x\ln x - x + c$

8) $-\frac{1}{3}\left(x\ln x - x\right) + c$

9) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

10) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

11) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln\left|x-2\right|\right)\right) + c$

12) $x\tan x + \ln\left|\cos x\right| + c$

13) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + c$

15) $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2 + 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

16) $x\left(\ln x\right)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + c$

17) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\left(\ln x - 1\right) + c$

18) $-e^x\cos x + \frac{e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{2} + c$

19) $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

20) $\frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) $\frac{e^x}{x+1}+c$

22) $x(\tan x-x)+\ln|\cos x|+\frac{x^2}{2}+c$

23) $\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}}+c$

24) $x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$

25) $e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$

26) $\frac{1}{n}\left\{(\cos x)^{n-1}\sin x+(n-1)\int(\cos x)^{n-2}dx\right\}$

27) $\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5(\cos x\sin x+x)\right)+c$

28) $\frac{1}{n}\left(-(\sin x)^{n-1}\cos x+(n-1)\int(\sin x)^{n-2}dx\right)$

29) $\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5(x-\sin x\cos x)\right)+c$

30) $\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}(2n-1)\right)$

31) $\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\}$

32) $\int e^{ax}\cos bx dx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}$, $\int e^{ax}\sin bx dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 12 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 131

# אינטגרלים בשיטת ההצבה

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos(\ln x)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $\arctan\left(e^x\right)+c$

5) $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

6) $\arcsin(\ln x)+c$

7) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

8) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

9) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

10) $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

11) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

12) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin(2\ln x)\right)+c$

13) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

14) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

16) $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

17) $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

**19)** $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

**20)** $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

**21)** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

**22)** $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

**23)** $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

**24)** $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 13 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 134
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 136
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית..... 137

# אינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

18) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

14) $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

15) $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

16) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

17) $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$

19) $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

2) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

3) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

4) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

5) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

## תשובות סופיות

1) $x^3-x^2+2x+c$

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

3) $x^3-x^2+x+c$

4) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

5) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

5) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

6) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^{2}\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^{3}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}-0.5\right)^{2}+0.75\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

5) $-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+c$

6) $2\sqrt{1+e^{x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}\right|+c$

7) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{x}\right|+c$

## נוסחאות

$$\left(a-b\right)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 14 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים


1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)

2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 139

3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 141

4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 142

5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 143

6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 146

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

| | |
|---|---|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$ | $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ |
| $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$ | $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$ | $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$ |

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

4) $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

8) $\int \tan^2 x dx$

9) $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

10) $\int \sin 7x\cos 5x dx$

11) $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

12) $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 x dx$

14) $\int \sin^2 4x dx$

15) $\int \cos^3 x dx$

16) $\int \sin^3 4x dx$

17) $\int \cos^4 x dx$

18) $\int \sin^4 4x dx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

24) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln|\cos x|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ (x=\arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t\\ (x=\arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int(\sin^2 x+\sin x+2)\cos x dx$

2) $\int(\cos^3 x+\cos x-2)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

## תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c} t=\tan\frac{x}{2} \\ (x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

## תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ (t = \arcsin\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\tan t \\ (t = \arctan\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos\frac{a}{x}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3) $\int \sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\int \sqrt{x^2+2x-3}dx$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

3) $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

4) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

5) $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

6) $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

7) $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

8) $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

9) $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

10) $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

11) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

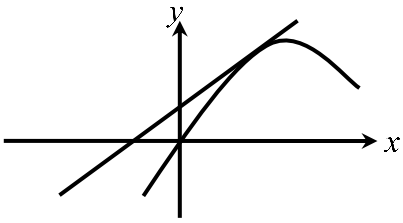

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$ .

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

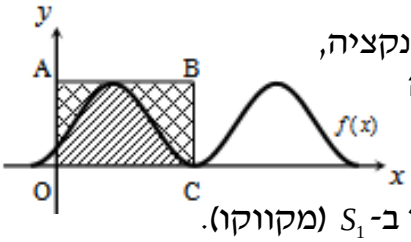



א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ , ברביע הראשון והשני.

**2)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$ ,

בתחום $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$ .




נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- $x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$ (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$ יסומן ב- $S_2$ .

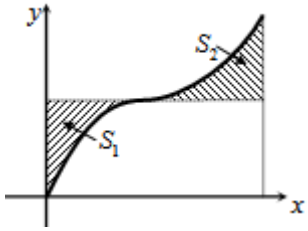
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ .

**3)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$ , בתחום $0\le x\le 2\pi$ .

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

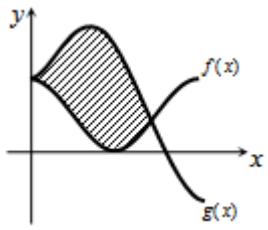
ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2\pi$ , ונעביר ישר המקביל לציר ה- $x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, $S_1$ ו- $S_2$ , שווים.





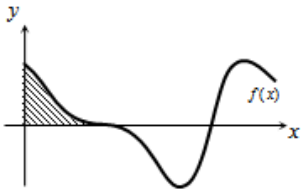
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$ , בתחום $0\le x\le \pi$ .



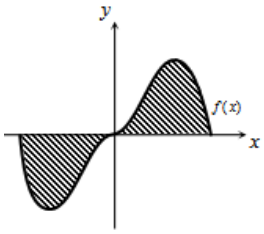

א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ .

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$ .




א. מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות המקיימות
$f'(x)=0$ , בתחום $0<x<2\pi$ .
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ , אשר אינה קיצון,
נמצאת על ציר ה- $x$ .
ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .
ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

**6)** נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$ .




א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$ .
באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$ ,
בתחום $-\pi\le x\le \pi$ .
ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ בתחום הנתון.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$ , כאשר $a,b$ פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ ,
והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ .
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$ .
מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

**1)** א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

**2)** א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

**3)** א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ , $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

**4)** א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

**5)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$ .

**6)** $b=-2$ , $a=2$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 15 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

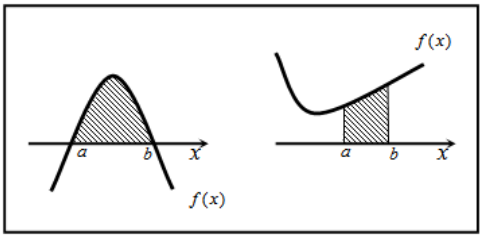
תוכן העניינים

1. חישוב שטחים ..... 150
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y ..... 170
3. אורך קשת ..... 171

# חישוב שטחים

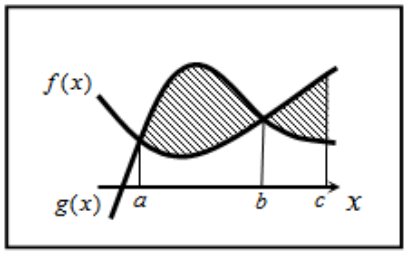
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :




$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

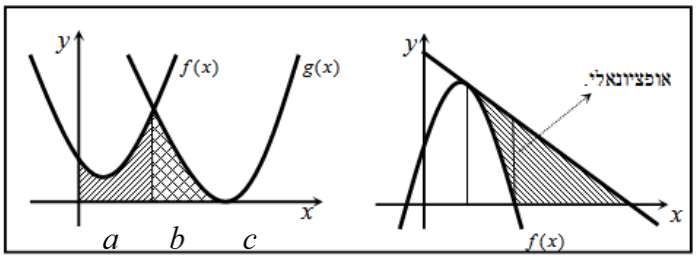



$$S_1=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$S_2=\int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$S=S_1+S_2$$

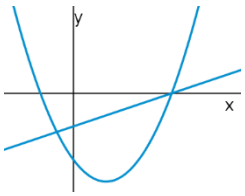
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :



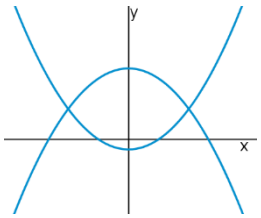

$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



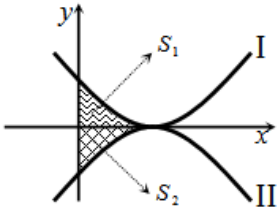

**2)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-1$ , $g(x)=7-x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



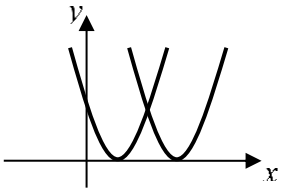

**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- $S_1$ ו- $S_2$, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.




**4)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1$ , $g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

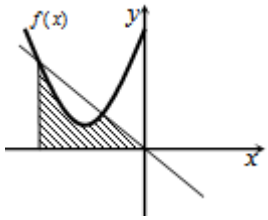



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$ , כמתואר באיור.

א. מצאו את משוואת הישר.

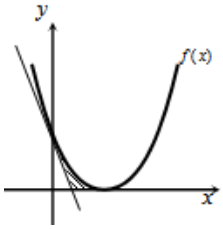
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והישר $x=-4$.





כתב ופתר – גיא סלומון ©

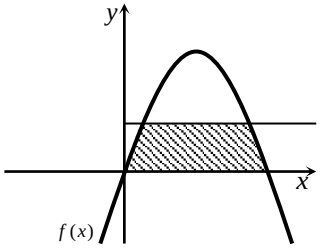



**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ .
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

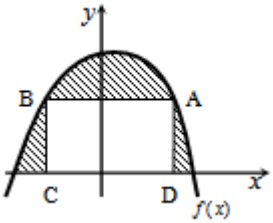



**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$ .
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$ .

א. מצאו את ערך הפרמטר $k$ .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

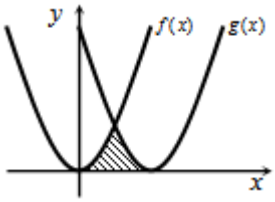
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).




**8)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$ . ישר AB, שמשוואתו $y=6$
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא $x=4$ .

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ (השטח המסומן).



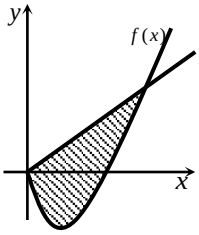

**9)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$ , בנקודה שבה $x=2$ .
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$ .

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (השטח המסומן).


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



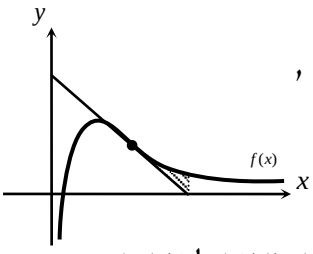

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- $y$ הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

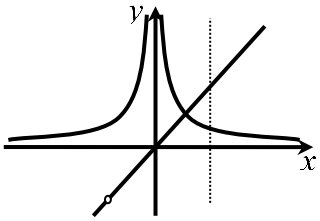
**11)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

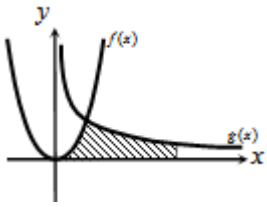
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.

**12)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- $x$.

**13)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

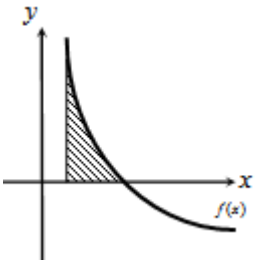



$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ ($a$ קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=4$.

**14)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע)




חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $(6,0)$.

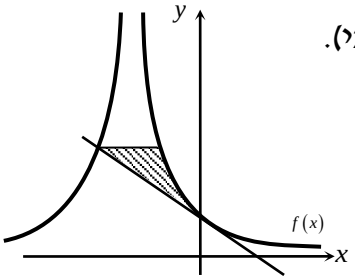
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והישר $x=2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$, הוא $-\frac{1}{9}$.




א. מצאו את ערך הפרמטר $A$.

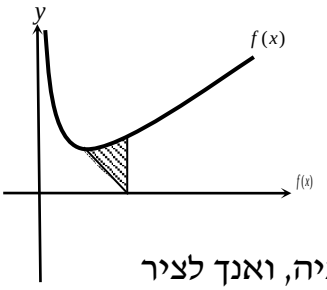
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

**16)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

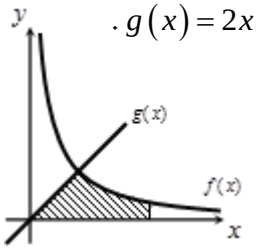



א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- $x$.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

**17)** באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=2x$.



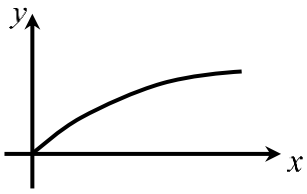

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=9$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- $y$.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.




לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

**20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

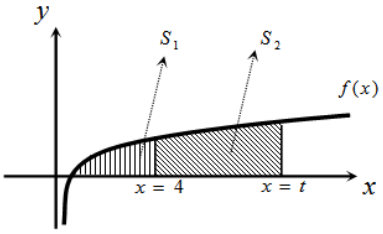
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$, $x=4$ ו- $x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ ב- $S_1$,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והאנכים ב- $S_2$.

ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את $t$.




**21)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

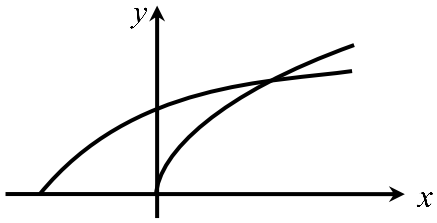
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ ואנך לציר ה- $x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**22)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- $x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.




**23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

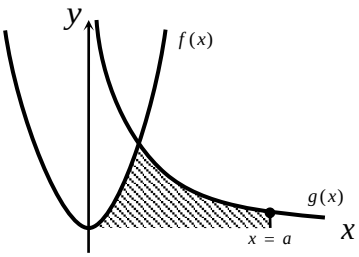
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- $x$ והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.

מצאו את $a$.



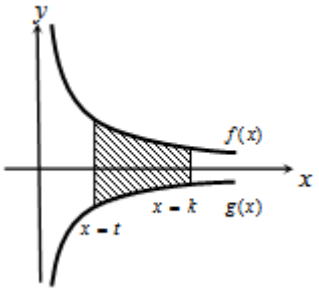


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי $AB=2CD$.

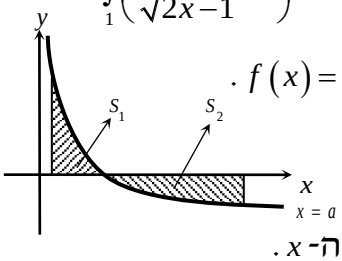



א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$. מצאו את $t$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$ יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.




ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.

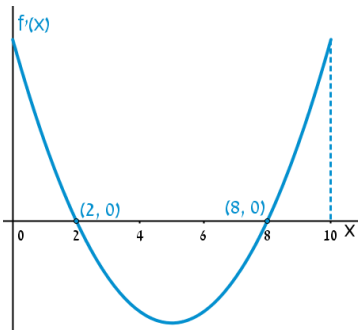
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$, $x=1$ ו- $x=13$, כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והאנך $x=1$, כלומר את $S_1$.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח $S_2$. נמקו.



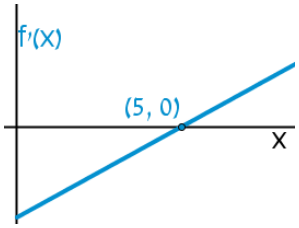

**26)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$, וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

**27)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$ , אשר חותך את ציר ה- $x$ בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.




א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

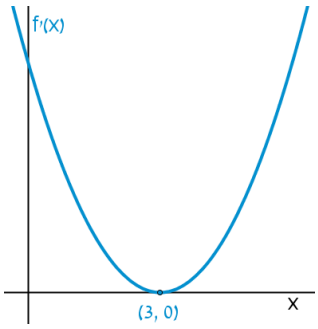
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ .

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$ שלה הוא $y=-2$ .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$ כאשר $y=8$ .

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

**28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$ .

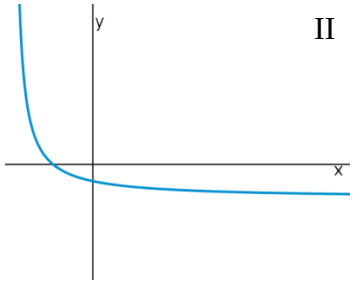


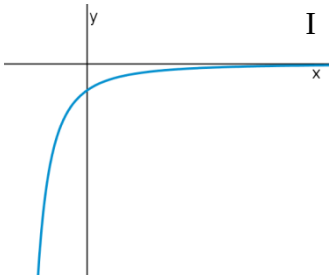

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי $f(3)=4$ , וכי היא חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-5$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

**29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ :

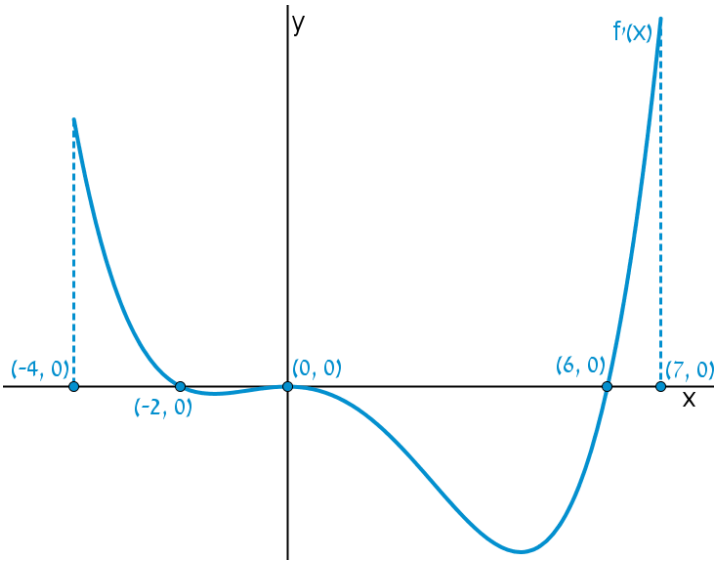



א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$ , וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-2$ .
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ , הצירים והישר $x=10$ ?

**30)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ :




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$,

לפי הנתונים $f(0)=-2$ , $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ ברביע השלישי.

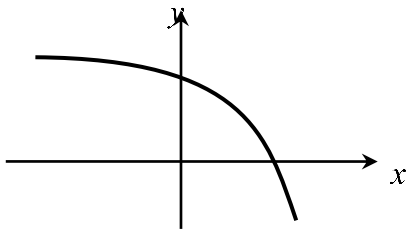
ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ ברביע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים יסודיים | אינטגרלים של פונקציות מורכבות |
|---|---|
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$ | $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$ |

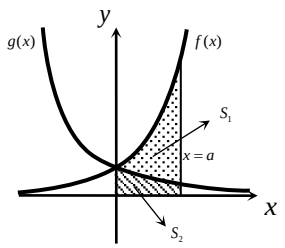
**31)** נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$.
ניתן להשאיר $e$ ו- $\ln$ בתשובה.




**32)** נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
וציר ה- $y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.

**33)** נתונות הפונקציות $g(x) = e^{-x}$ ו- $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$ חותך את הפונקציה $f(x)$,
ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$, כך שנוצר מלבן.
הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

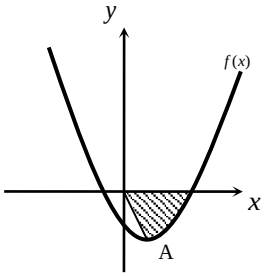
**34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
נעביר אנך לציר ה- $x$ את הישר $x = a$,
כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.
מצאו את $a$.





כתב ופתר – גיא סלומון ©

**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$ .




הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

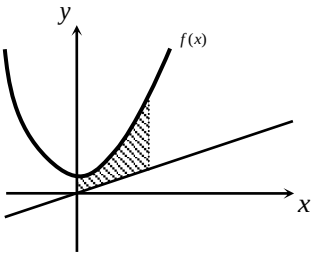
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.7$ .

**36)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$ .




ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

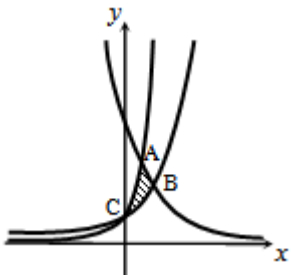
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ , והישר $y=0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$ והאנך $x=2$ .

**37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

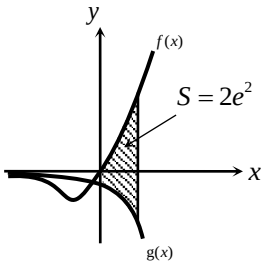



א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

**38)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$ .

נעביר ישר $x=a$ , כאשר $a>0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את $a$ .

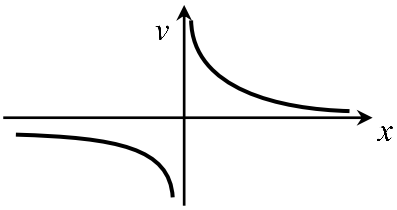

כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות לוגריתמיות

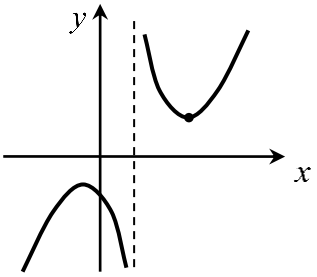
### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

**39)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



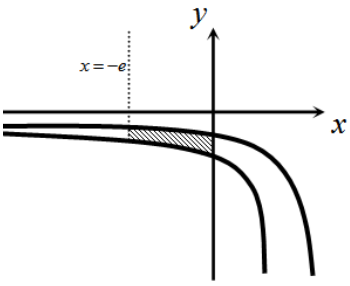

**40)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.




**41)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$ ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$.

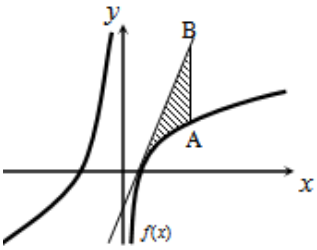




כתב ופתר – גיא סלומון ©

**42)** נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ היא $y=18x-9$.




א. מצאו את $a$ ו- $b$ וכתבו את הפונקציה.

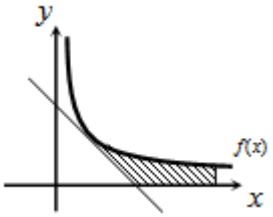
נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**43)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

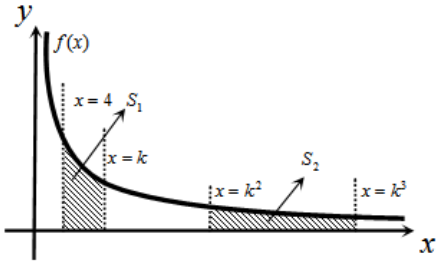



א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$ והישר $x=e^2$.

**44)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.

נעביר את הישרים $x=k$, $x=k^2$, $x=k^3$ ו- $x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.



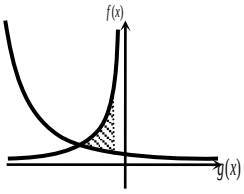

א. הביעו באמצעות $k$ את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

ב. הראו כי ההפרש $S_2-S_1$ אינו תלוי ב- $k$, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$.
מצאו את $k$.

**45)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=0.4$.



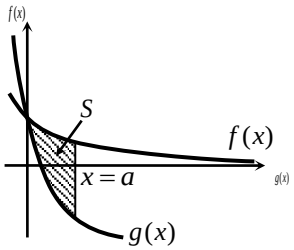

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**46)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$,
בתחום $x\ge 0$.

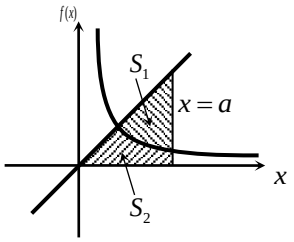



א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- $x$, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצאו את ערכו של $a$, עבורו מתקיים $S=4$.

**47)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.




נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של $a$, עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

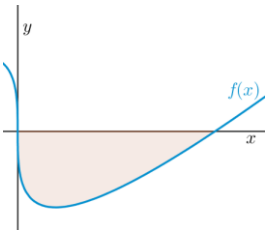
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

### אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n}\neq -1$.

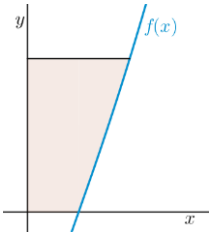
**48)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**49)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

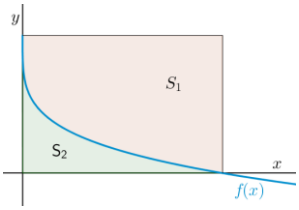



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ג. נעביר אנך לציר ה- $y$ מהנקודה $(4,6)$.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

**50)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.

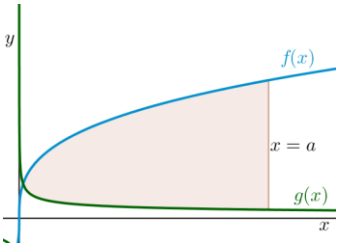



נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$,
ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

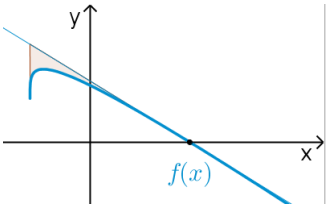
**51)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$ ($a$ פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.
מצאו את $a$.

**52)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, $a$ פרמטר.




ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את הפרמטר $a$ וכתבו את הפונקציה.

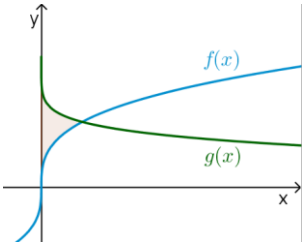
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

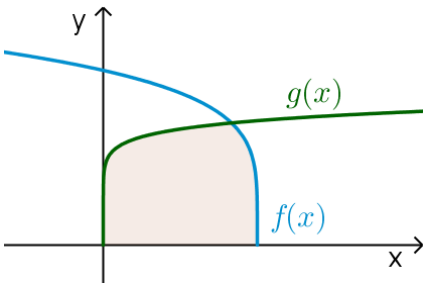
**53)** באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$.

**54)** הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.



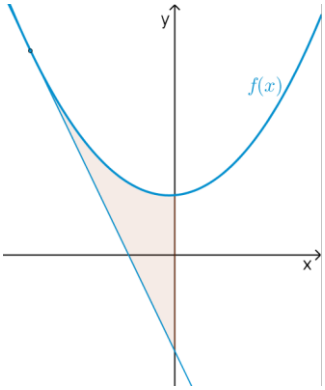

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- $x$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

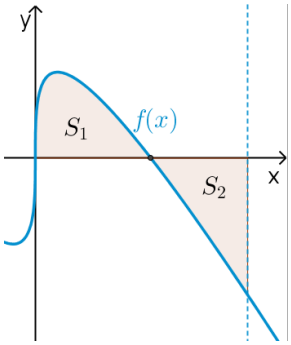
**55)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$ .




א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .

**56)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$ .




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ יסומן ב- $S_1$ .
נעביר ישר $x=k$ , אשר יוצר את השטח $S_2$ , כמתואר באיור.
מצאו את $k$ , אם ידוע כי $S_1=S_2$ .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

15) א. $\text{A}=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$

21) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

**25)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

**26)** ב. 10 יח"ש.

**27)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

**28)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

**29)** א. $f'(x):\mathrm{I}$, $f(x):\mathrm{II}$ ב. 1 יח"ש.

**30)** א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**31)** $S=0.192$ יח"ש.

**32)** $b=2$

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $a=\ln 2$

**35)** א. $\mathrm{A}(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

**36)** א. $a=-2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**37)** ב. $\mathrm{C}(0,1)$, $\mathrm{B}\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $\mathrm{A}(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

**38)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**39)** $S=\ln 4$ יח"ש.

**40)** $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

**41)** א. $a=2$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**42)** א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\dfrac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. 11.54 יח"ש. $S=6+\ln 256\approx$

**43)** א. $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

**44)** א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**45)** א. $g(x)=\dfrac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**46)** ב. $a=2$

**47)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\dfrac{S_1}{S_2}=5.955$

**48)** א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**49)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**50)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**51)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**52)** א. $a=1$ , $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

**53)** א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

**54)** א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

**55)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

**56)** א. כל $x$. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים ביחס לציר ה-$y$

## שאלות

**1)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

## תשובות סופיות

**1)** $20\frac{5}{6}$

**2)** $20\frac{5}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ (Decimal: 3.16784)


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 16 - בעיות מקסימום ומינימום כלכליות

תוכן העניינים

1. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני ..... 172

# בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

## שאלות

**1)** יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של $225 למכונה.
עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא $125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של $5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?

ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.

**2)** מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות.
בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.
לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, **מה המחיר** שיש לקבוע **ולכמה דקות**) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?

**3)** אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט.
הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט.
על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי ש**הרווח** שלו יהיה מקסימלי.

ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?

ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?

**4)** חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.
מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?

**5)** מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג',
ומספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע הוא 200.
על כל 5 אג' ש'סלקום מעלה – יורד מספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע בעשר.
מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS,
כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.

**6)** קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪.
אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום.
על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?

**8)** חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪.
5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר,
ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר.
הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.

**9)** חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים.
לכל $x$ זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- $x$ ₪ לזוג אופניים.
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור,
על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

## תשובות סופיות

**1)** א. 200 ב. $93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.

**2)** 70 ₪ ל-350 דקות.

**3)** א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪

**4)** 40

**5)** 75 אג'.

**6)** מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.

**7)** 4,500 ₪.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** 350


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 17 - שימושי הנגזרת

### תוכן העניינים

1. נוסחת הקירוב הלינארי ..... (ללא ספר)
2. גמישות הביקוש ..... 174
3. בעיות קיצון כלכליות ..... (ללא ספר)
4. בעיות קיצון מסוגים שונים ..... (ללא ספר)

# גמישות הביקוש

## שאלות

**1)** חשב את גמישות הביקוש של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+4x$

ב. $f(x)=xe^x$

ג. $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

ד. $f(x)=\ln(\ln x)$

**2)** פונקציית הביקוש נתונה על ידי: $D(p)=10-p$.
מצא את גמישות הביקוש, אם $p=4$.

**3)** פונקציית הביקוש נתונה על ידי: $D(p)=a-bp$ , $a,b>0$.

א. מצא את המחיר $p$ בו $\eta_D=0$.

ב. מצא את המחיר $p$ בו $\eta_D=-1$.

**4)** פונקציית הביקוש נתונה על ידי: $x=a\cdot\sqrt{b-p}$ ,
כאשר $x$ - כמות, $p$ - מחיר, $a,b>0$ קבועים.
מצא את $x$ ו- $p$ עבורם גמישות הביקוש שווה ל-$-1$.

**5)** הוכח כי: $\eta_{\ln f}=\dfrac{\eta_f}{\ln f(x)}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $\eta_f = \frac{2x+4}{x+4}$ ב. $\eta_f = 1+x$ ג. $\eta_f = \frac{x^2}{x^2+4}$

ד. $\eta_f = \frac{1}{\ln x \cdot \ln(\ln x)}$

2) $\eta_D = \frac{-2}{3}$

3) א. $p = 0$ ב. $p = \frac{a}{2b}$

4) $x = a\sqrt{\frac{b}{3}}$ , $p = \frac{2b}{3}$

5) הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 18 - מטריצות

### תוכן העניינים

1. הגדרות ..... (ללא ספר)

# שיטות כמותיות

## פרק 19 - מטריצות המשך

### תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)
2. מטריצה אלמנטרית ..... (ללא ספר)
3. פירוק LU ..... (ללא ספר)

# שיטות כמותיות

## פרק 20 - בעיות גדילה ודעיכה

### תוכן העניינים


1. שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה ..... 176
2. שאלות העוסקות במציאת הזמן ..... 177
3. שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית ..... 178
4. שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית ..... 179
5. שאלות חימום ..... 180
6. שאלות שונות ..... 184

## שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה:

### שאלות:

4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית.
לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש.
מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?

5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים.
מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?

6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית.
אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים,
כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

### תשובות סופיות:

4) 2.3%.
5) 3.5%.
6) 921 חיידקים.

# שאלות העוסקות במציאת הזמן:

## שאלות:

**7)** הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה.
אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪.
תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?

**8)** אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה.
אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?

**9)** חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?

**10)** חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית.
אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?

**11)** זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים.
תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?

**12)** בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

## תשובות סופיות:

**7)** 9.41 שנים.
**8)** 7.47 שנים.
**9)** 16.43 שעות.
**10)** 12.43 שעות.
**11)** 9.43 ימים.
**12)** 16:00

# שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

## שאלות:

**3)** מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה.
כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

## תשובות סופיות:

**3)** 34,907 זברות.

# שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

## שאלות:

**1)** מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?

**2)** מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

## תשובות סופיות:

**1)** 5,062 חסידות.

**2)** 101,342 תושבים.

# שאלות חימום:

## סיכום כללי:

**הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מערכית:**

הכמות לאחר פרק זמן $t$, המסומנת $M_t$, כאשר הכמות ההתחלתית היא $M_0$ וקצב הגידול/דעיכה הוא $q$ ניתנת ע"י הנוסחה הבאה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי: $q = \frac{100 \pm p}{100}$.

## שאלות:

**1)** מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

א. מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
ב. מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
ג. אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
ד. מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
ה. כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
ו. מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
ז. רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
ח. מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

**2)** מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

א. $q = 1.2$
ב. $q = 1.6$
ג. $q = 0.85$
ד. $q = 0.72$

**3)** מצא את $M_0$:

א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$
ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$
ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$

**4)** מצא את $q$:

א. $25=10\cdot q^{6}$

ב. $512.36=6\cdot 10^{7}\cdot q^{40}$

ג. $10^{3}=2.4\cdot 10^{6}\cdot q^{25}$

ד. $9.35=7\cdot q^{10.5}$

ה. $6.42\cdot 10^{4}=10^{7}\cdot q^{3\frac{1}{3}}$

ו. $13.25=9.2\cdot q^{12.3}$

**5)** מצא את $t$:

א. $10\cdot 1.05^{t}=70$

ב. $62.08^{t}=39.68$

ג. $7\cdot 10^{7}\cdot 0.82^{t}=10^{5}$

**6)** אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2.
בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.

א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?

ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?

ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

**7)** כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%.
במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.

א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?

ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?

ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

**8)** מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה.
מה היה מחירו ההתחלתי?

**9)** שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם.
ידוע כי שרון רצה מרחק של 2.5 ק"מ ביום השביעי.
כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

**10)** אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה.
כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.

א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?

ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

**11)** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית.
בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה.
כיום יש באגם $2\cdot10^5$ ק"ג אצות.

א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?

ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?

ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?

**12)** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.

א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?

ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?

**13)** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים.
בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.

א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?

ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?

**14)** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה $5\cdot10^4$ טון עצים ובשנת 1990 הייתה $10^7$ טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?

**15)** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג.
בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.

א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?

ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?

**16)** מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.

א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?

ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?

**17)** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.

א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.

ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

## תשובות סופיות:

1) א. 1.2 ב. 0.6. ג. 1.05. ד. 1.15.
ה. 2. ו. 3. ז. 0.75 ח. 0.5.

2) א. 20% גדילה ב. 60% גדילה ג. 15% דעיכה ד. 28% דעיכה.

3) א. 80. ב. 45. ג. 150.

4) א. 1.165. ב. 0.7469. ג. 0.732. ד. 1.028.
ה. 0.22. ו. 1.03.

5) א. 39.88 ב. 0.89 ג. 33.01.

6) א. 100. ב. 200. ג. 52,428,800.

7) א. 1889.56 גרם. ב. 1422.4 גרם. ג. כן. 456.747 גרם.

8) 592.6 ₪.

9) 1.41 ק״מ.

10) א. 578,642 תושבים. ב. 467,304 תושבים.

11) א. 3,200,000 ק״ג ב. 50,000 ק״ג. ג. 4,525,483.4 ק״ג.

12) א. 1.029. ב. 9.6 מיליון תושבים.

13) א. 1.032. ב. 2117 תוכים.

14) 14.16%.

15) א. 0.9671. ב. 70.35 גרם.

16) א. 0.90657. ב. 77.1%.

17) א. 3.18% ב. 6.15.

# שאלות שונות:

## שאלות:

**13)** בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת.
בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת.
אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה.
באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

**14)** נתונות שתי תרביות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית.
בשעה מסוימת בתרבית א' היו 4,000 חיידקים ובתרבית ב' היו 500 חיידקים.
נסמן:
$t_1$ - הזמן שחלף עד שבתרבית א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית ב'.
$t_2$ - הזמן שחלף עד שבתרבית ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית א'.
חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

**15)** מספר החיידקים בתרבית גדל ב- $p\%$ בכל שעה.
בשעה מסוימת מספר החיידקים היה $m$. כעבור $t$ שעות הוציאו $m$ חיידקים מהתרבית וכעבור עוד $t$ שעות היו $6m$ חיידקים בתרבית.
הבע את $t$ באמצעות $p$.

**הערה:**
שאלות 16-17 עוסקות בפתרון בעיות קיצון מעריכיות.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=700\cdot 1.08^x-200x$.
מצא את ערך ה- $x$ של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

**17)** נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

**18)** כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה.
בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים.
מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

**19)** ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.

א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.

ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.

**20)** שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.

א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?

ב. דני משקיע סכום כסף $k$ לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'.
רפי משקיע סכום כסף זהה $k$ לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'.
למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות?
נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.

**21)** שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב'-85,000 ₪.
ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה
וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.

א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.

ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?

**22)** כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.

א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.

ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.

**23)** נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.

א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.

ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן $(q_1, q_2)$ צריכים להיות מספרים הופכיים.

**24)** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע $p$ מדי שעה.
ביום מסוים היו $k$ גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד $k$ גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו $k$ גרם מהחומר. מצא את $p$.

**25)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה $k$ שקלים.
המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות.
לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010.
אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$.
מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.

**26)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה.
בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים.

א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.

ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.

**27)** אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה.
כעבור $t$ שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל-$t$ שנים נוספות בתוכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.

א. מצא את $t$.

לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪.

ב. מצא את אחוז הריבית החדש.

**28)** ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה.

א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'.

ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

**29)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של $p$ אחוזים לשנה.
בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.

א. מצא את אחוז הגידול השנתי $p$ אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.

ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.

**30)** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.

א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.

ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.

**31)** אדם מפקיד $k$ שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$ . לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון $k$ שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפיקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את $p$ .

**32)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה $k$ שקלים.
המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $k$ . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

## תשובות סופיות:

**13)** בנק א'.

**14)** $\frac{t_1}{t_2}=\frac{1}{2}$

**15)** $t=\frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)}$

**16)** $x=17.04$ , מינימום.

**17)** 11 חודשים.

**18)** 100,000 עצים.

**19)** א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים.

**20)** א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.

**21)** א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.

**22)** א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.

**23)** א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.

**24)** 14.82%

**25)** ב-5.95%

**26)** א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים.

**27)** א. $t=4$ ב. $p=20\%$

**28)** א. 3.13% ב. 25,909 ₪

**29)** א. 5% ב. 12.96 שנים.

**30)** א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים .

**31)** 16.63%

**32)** ב-6.6%

# שיטות כמותיות

## פרק 21 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

### תוכן העניינים

1. חלוקת קטע ביחס נתון ..... 189
2. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית ..... 190
3. מיקום נקודה ביחס לישר ..... 194
4. מצבים הדדיים בין ישרים ..... 196
5. מציאת משוואות ישר ..... 198
6. מרחק בין ישרים מקבילים ..... 199
7. מרחק נקודה מישר ..... 201
8. משוואת הישר ..... 203
9. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר ..... (ללא ספר)
10. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר ..... 208

# חלוקת קטע ביחס נתון:

## סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}, y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

## שאלות:

**1)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $A(2,-5)$ , $B(-12,16)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי: $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5}$.

**2)** קודקודי משולש ABC הם: $A(-1,3)$ , $B(6,0)$ , $C(4,-12)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

**3)** מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקודקודיו הם: $A(x_1,y_1)$ , $B(x_2,y_2)$ , $C(x_3,y_3)$.

**4)** קודקודי המשולש ABC הם: $A(5,1)$ , $B(7,-3)$ , $C(-1,4)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

## תשובות סופיות:

**1)** $P(-2,1)$

**2)** $M(3,-3)$

**3)** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

**4)** 1.697 יחידות אורך.

# מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

## סיכום כללי:

**נוסחאות כלליות:**

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.

## שאלות:

**שאלות העוסקות באמצע קטע:**

**1)** מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)\ ,\ B(5,-8)$ ב. $A(-3,0)\ ,\ B(3,-2)$

ג. $A(4,5)\ ,\ B(-4,-5)$ ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\ ,\ B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)\ ,\ B(-3,-1)$ ו. $A(4,7)\ ,\ B(4,-12)$

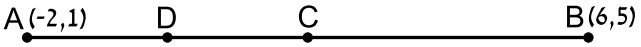
**2)** נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)\ ,\ M(2,1)$ ב. $A(-6,-8)\ ,\ M(0,0)$

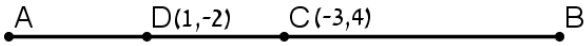
ג. $A(13,-11)\ ,\ M(4,-7)$ ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)\ ,\ M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

**3)** נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $B(2,-4)\ ,\ C(6,1)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

**4)** באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $A(-2,1)\ ,\ B(6,5)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



**5)** באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$ , $C(-3,4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.




**6)** הנקודות $A(2,-7)$ , $B(-10,4)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

**שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:**

**7)** מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

| | |
|---|---|
| א. $A(4,7)$ , $B(-3,7)$ | ב. $A(6,2)$ , $B(1,2)$ |
| ג. $A(-3,10)$ , $B(0,6)$ | ד. $A(6,-9)$ , $B(1,3)$ |
| ה. $A(4,7)$ , $B(13,-1)$ | ו. $A(6,6)$ , $B(-9,-9)$ |

**8)** חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $A(3,-2)$ , $B(4,9)$ , $C(0,14)$.

**9)** נתונות נקודות $A(14,4)$ , $B(6,y)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את $y$.

**10)** נתונות נקודות $A(x,-12)$ , $B(15,-2)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את $x$.

**11)** נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- $y$ שלה גדול פי 3 משיעור ה- $x$ שלה
ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

**12)** במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$
יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- $y$ של הקדקודים B ו-C
הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

**13)** אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $A(-3,-2)$ , $B(-4,1)$. מצא את היקף המלבן.

**שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:**

**14)** מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)\ ,\ B(4,1)$

ב. $A(3,-2)\ ,\ B(-3,1)$

ג. $A(7,8)\ ,\ B(6,15)$

ד. $A(0,5)\ ,\ B(7,0)$

ה. $A(6,9)\ ,\ B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)\ ,\ B(18,-1)$

**15)** מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם: $A(6,5)\ ,\ B(2,13)\ ,\ C(4,-7)$ מונחים עליהם.

## תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$
ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $A(5,-8)$ , $B(-11,16)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.862 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $B(3,-2)$ , $C(-3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AB}=-2$ , $m_{BC}=-10$ , $m_{AC}=6$.

# מיקום נקודה ביחס לישר:

## שאלות:

**13)** מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקה מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

**14)** מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקה מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

**15)** נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $B(13,6)$ , $A(1,1)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

**16)** נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
$\text{I}: x+2y+1=0$ , $\text{II}: x-2y-11=0$ , $\text{III}: 2x-y+6=0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

**17)** מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $\text{III}: 3x+4y-11=0$ , $\text{II}: 3x-4y-51=0$ , $\text{I}: 4x-3y+2=0$.

**18)** מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

**19)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

**20)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

**21)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

**22)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

**23)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

**24)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

## תשובות סופיות:

**13)** $(64,99)$

**14)** $(-1,8)$

**15)** $C(11,3)$

**16)** $(-1,-4)$

**17)** $(2,-5)$

**18)** $y=3x-4$

**19)** $y=2x+10$ , $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$

**20)** $y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$ , $y=-\frac{22}{31}x+16\frac{12}{31}$

**21)** $y=6$ , $y=\frac{3}{4}x+3\frac{3}{4}$

**22)** $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$ או $x=1$

**23)** $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$ או $x=10$

**24)** $y=-\frac{4}{3}x-7$

# מצבים הדדיים בין ישרים:

## סיכום כללי:

**מצב הדדי בין שני ישרים:**

- ישרים מקבילים מקיימים: $n_1 \neq n_2$ , $m_1 = m_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $n_1 = n_2$ , $m_1 = m_2$.

## שאלות:

**22)** מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

**23)** קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

**24)** קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

**25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y = 6x - 2$ .

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

**26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5,-1)$ , $B(3,7)$ , $C(-5,5)$ .
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

## תשובות סופיות:

**22)** א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

**23)** א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

**24)** מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

**25)** א. $m_{AB} = m_{CD} = 6$ , $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$ .

ב. הכל הפוך: $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$ , $m_{BC} = m_{AD} = 6$ .

**26)** שאלת הוכחה.

# מציאת משוואות ישר:

## שאלות:

**27)** מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-$y$.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

## תשובות סופיות:

**27)** א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

# מרחק בין ישרים מקבילים:

## סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$ כאשר: $B>0$
  הוא: $d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:
  - אם: $C_1>C_2$ , $(d>0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מתחת ל- $Ax+By+C_2=0$.
  - אם: $C_1<C_2$ , $(d<0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מעל ל- $Ax+By+C_2=0$.

## שאלות:

**25)** מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

**26)** מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x+12y+25=0$ , $5x+12y-14=0$.

**27)** נתונים הישרים: $12x-2y-15=0$ , $y=6x+5$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

**28)** נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן AB : $3x+y=0$ ו- CD : $3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

**29)** צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

**30)** נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

**31)** במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

## תשובות סופיות:

**25)** $3x-4y+28=0$ , $3x-4y-12=0$

**26)** 3

**27)** $\frac{25}{\sqrt{148}}$

**28)** 14.4 יח"ש $S=$ , $(2.1,-3.3)$

**29)** $y=-\frac{2}{3}x+3$ , $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$ , $3x-2y-15=0$

**30)** $y=3x$

**31)** $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$

# מרחק נקודה מישר:

## סיכום כללי:

**הצגה כללית של ישר ומרחקים:**

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax+By+C=0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1,y_1)$ מהישר $Ax+By+C=0$ הוא: $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

  כאשר $B>0$:
  - אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
  - אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

## שאלות:

**5)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

**6)** מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $3x-4y+6=0$ , $A(-5,-1)$

ב. $12x+5y-17=0$ , $A(-3,8)$

ב. $2y+7=0$ , $A(11,-2)$

ד. $3x-14=0$ , $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

**7)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן מהישר $2x-y+5=0$ הוא: $\sqrt{20}$.

**8)** מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה הם: $A(7,-1)$ , $B(-5,4)$ , $C(-1,7)$ , $D(11,2)$.

**9)** מצא את שטחו של המשולש $\Delta ABC$ שבו שיעורי קדקוד $A$ הם $A(5,-3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x-4=0$ ו- $2x-y-1=0$.

**10)** מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2,2)$ , $B(-1,1)$ , $C(-5,-2)$.

**11)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקן מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$.

**12)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקן מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$.

## תשובות סופיות:

**5)** א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2.

**6)** א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$.

**7)** $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$ , $(4,3)$

**8)** $S_{ABCD}=$ 56 יח"ש

**9)** $S_{ABC}=$ 18 יח"ש

**10)** $S_{ABC}=$ 2.5 יח"ש

**11)** $(64,99)$ , $(4,9)$

**12)** $(-157,216)$ , $(-1,8)$

# משוואת הישר:

## סיכום כללי:

### נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

### שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$: $m=\tan\alpha$.

### משוואת הישר:

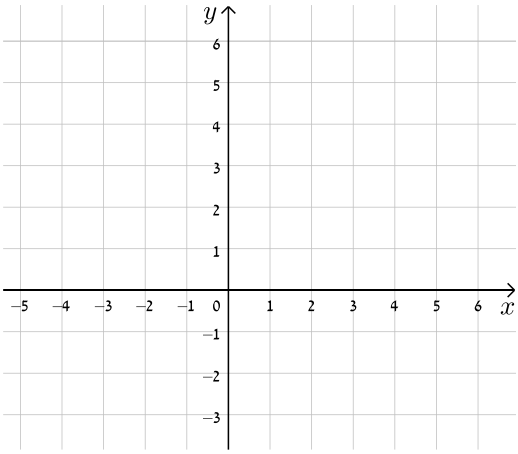
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
- כאשר: $m$ הוא שיפוע הישר ו- $n$ הוא ערך ה- $y$ של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$.

נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

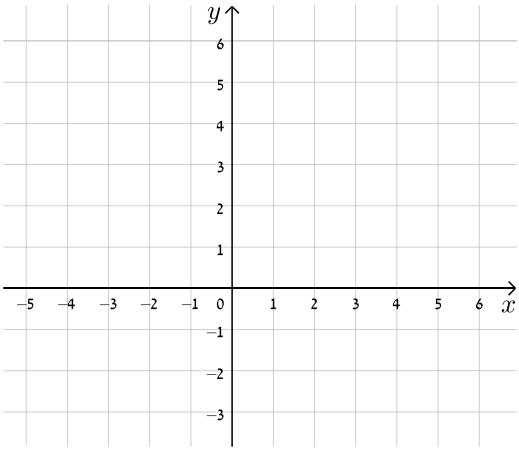
## שאלות:

**16)** עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

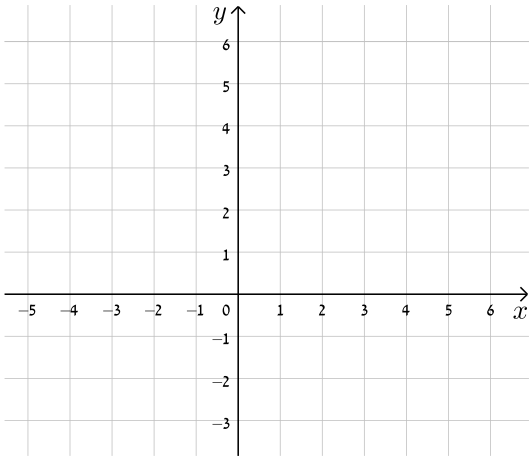
א. $y=x+4$



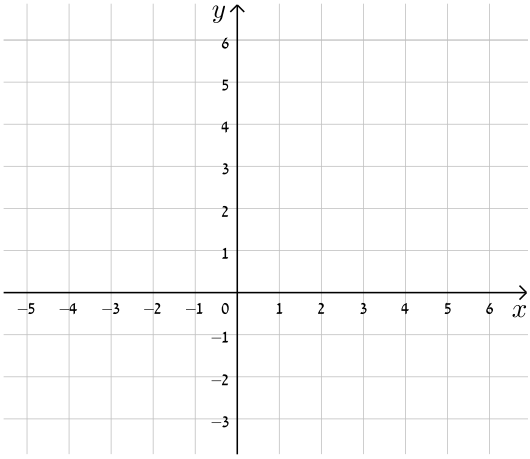
ב. $y=-x+5$



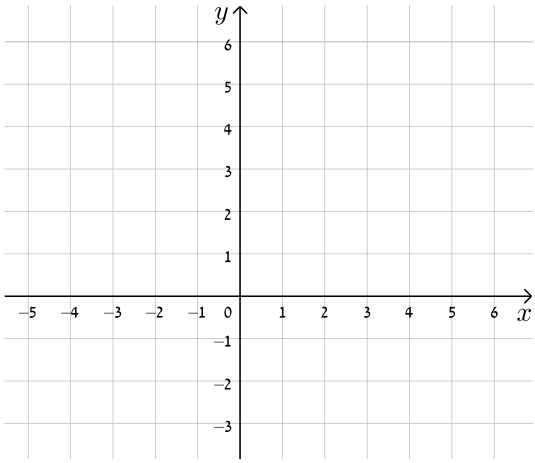
ג. $y=2x-3$



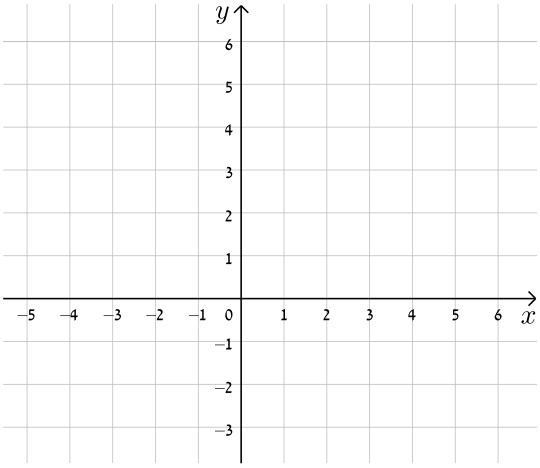
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

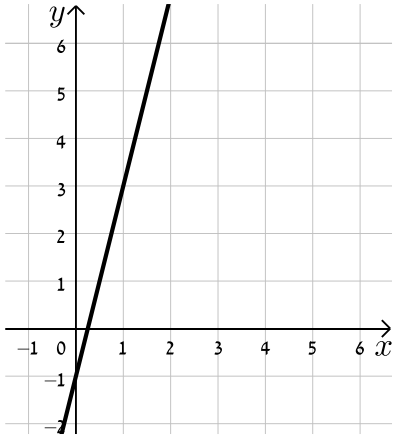


ו. $y=8-4x$

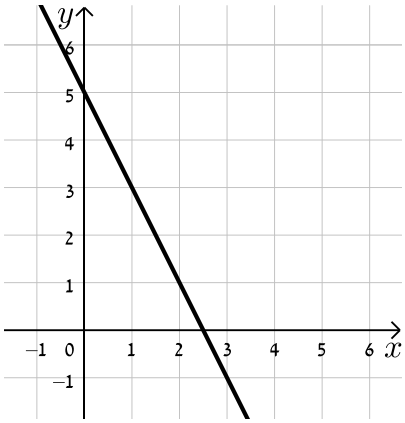


**17)** כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

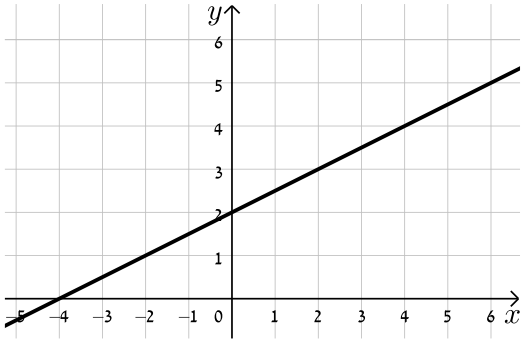
א.



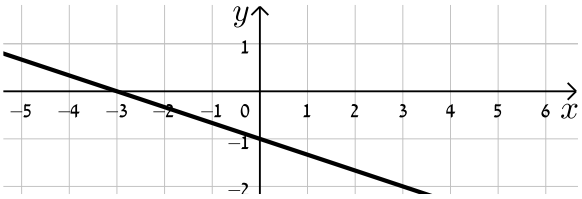
ב.



ג.




ד.




**18)** התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

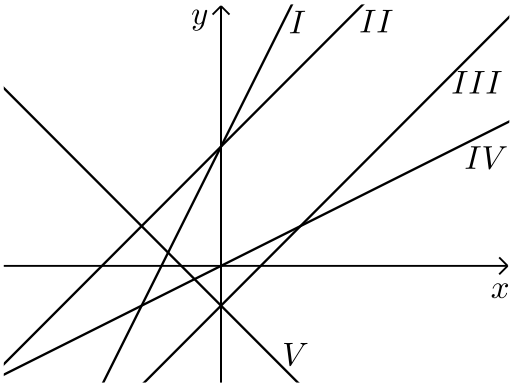
א. $y=x+3$

ב. $y=-x-1$

ג. $y=2x+3$

ד. $y=x-1$

ה. $y=\frac{1}{2}x$




**19)** נתונה משוואה הישר הבאה: $y=2x+3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$ , $C(0,4)$ , $B(3,3)$ , $A(-1,1)$.

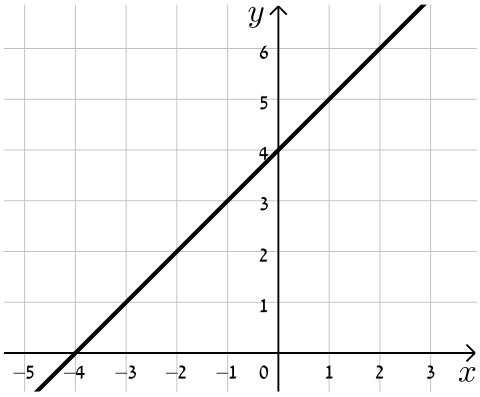
**20)** נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את $m$ וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

**21)** הנקודות $B(4,1)$ , $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$.
מצא את $m$ ואת $n$.

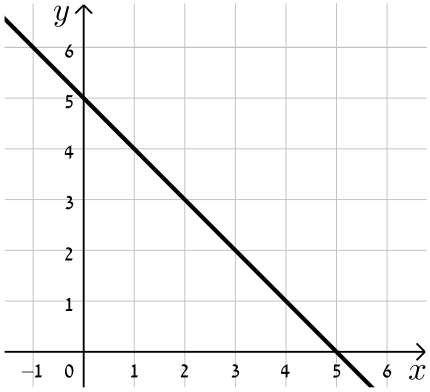
## תשובות סופיות:

**16)** להלן הגרפים של משוואות הישרים:

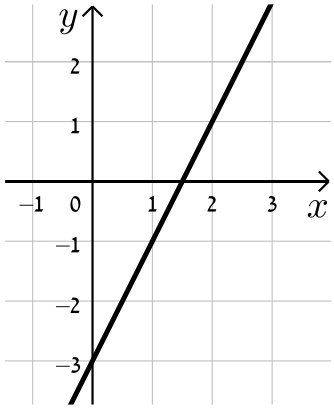
א.



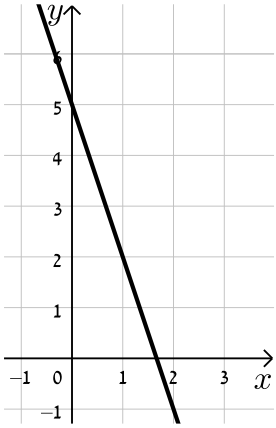
ב.



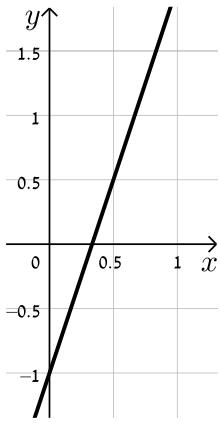
ג.



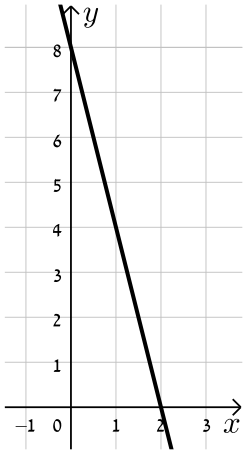
ד.



ה.



ו.



**17)** א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$ .

**18)** א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

**19)** נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

**20)** $m=\frac{9}{8}$ , B לא נמצאת.

**21)** $m=-4$ , $n=17$ .

## שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

### שאלות:

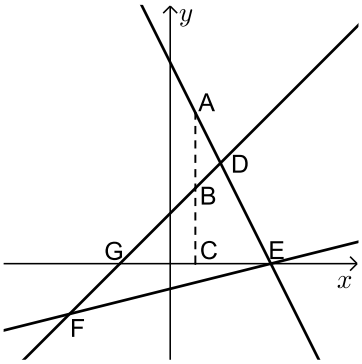
**28)** במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $A(3,-2)$ , $B(2,4)$ , $D(-2,2)$ .

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.
ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

**29)** נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$ .
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$ .

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

**30)** שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט: $x-4y-4=0$ , $x-y+2=0$ ו- $2x+y-8=0$ .
הקטע AC מקביל לציר ה- $y$ .

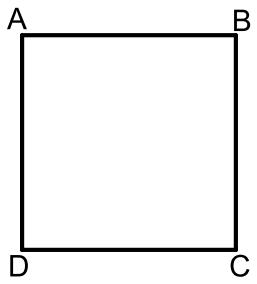



א. חשב את שטח המשולש DEF.
ב. נתון: $d_{BC}=3$ .
חשב את אורך הקטע AB.

**31)** BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$ .
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$ .
מצא את שיעורי הקדקוד C.

**32)** נתון טרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$ .
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$ .

א. מצא את משוואת הבסיס AB.
ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



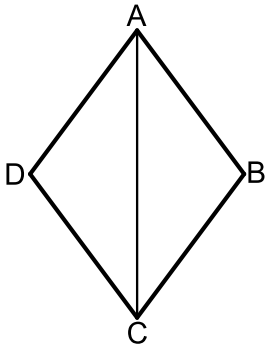

**33)** במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

ב. נתון גם: $D(4,13)$ , $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $=BC$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

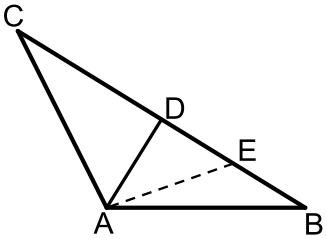
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.




**34)** המרובע ABCD הוא מעוין.
ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשואות הצלעות היא: $5y+x=4$.

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

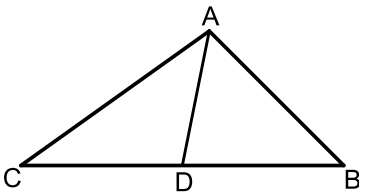
ב. מצא את שאר קדקודי המעוין




**35)** המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
ב-$\Delta ABC$ מעבירים את הגובה AD לבסיס BC
ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE=BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $D(5,7)$ , $E(8.5,2.5)$.

א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.




**36)** נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.
הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה-$x$ של הנקודה C הוא: $x_C=-1$.
כמו כן נתון: $A(7,8)$ , $m_{AB}=-2$.

א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

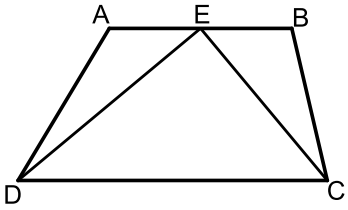
ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

**37)** המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-$x$.
שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$
כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\sphericalangle DEC=90°$.



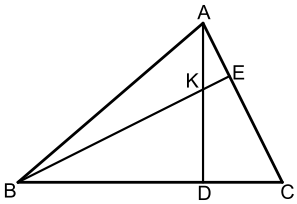

א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

**38)** AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.
ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.
שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$ , $D(-2,4)$.



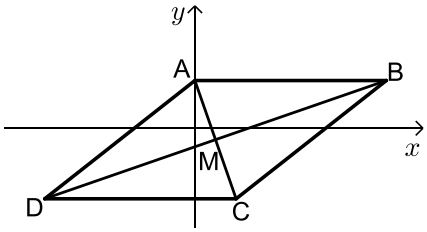

א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

**39)** נתון מעוין ABCD.ידוע כי הצלע CD מונחת על $y=-7$.
אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים
בנקודה: $M(-0.5,-3)$. שיפוע האלכסון AC הוא -4.

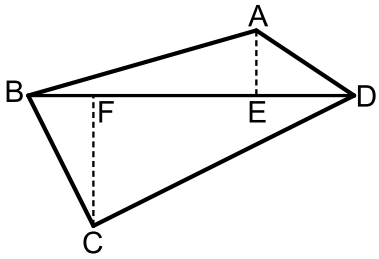



א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

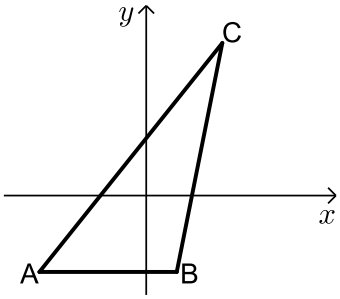
ג. חשב את שטח המשולש BMC.

**40)** נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$ , $B(-2,4)$ , $C(9,3)$ , $D(8,14)$.
מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.



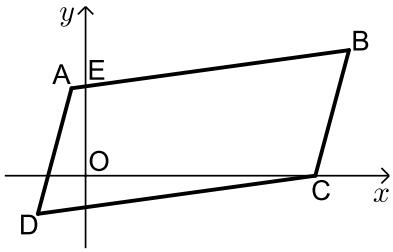

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

**41)** על הישר $y=-5$ מסמנים את
הנקודות: $A(-7,-5)$ , $B(2,-5)$.
הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.
נסמן את שיעור ה-$x$ של הנקודה C ב-$t$.




א. הבע באמצעות $t$ את שיעור ה-$y$ של הנקודה C.
ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.
הבע באמצעות $t$ את המרחקים של C מ-A ומ-B.
ג. מצא את $t$ ואת אורך הצלע BC.
ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.
ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.
מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח
המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

**42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$
ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.
א. מצא את $x$.
ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את משוואת הצלע AC.
ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-$y$ ב-D.
מצא את שיעורי הנקודה D.
ד. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם
שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90°)$.
ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.




**43)** באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$

ו- $B(x,4)$. ($x$ ו- $y$ נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את $x$ ו- $y$ אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה- $x$ בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- $y$ ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

## תשובות סופיות:

**28)** א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

**29)** א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

**30)** א. $S_{EDF}=$ 18 יח"ש. ב. 3 יחידות אורך $=AB$.

**31)** $C(14,5)$.

**32)** א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $C(2,1)$ , $B(2,-3)$ ג. 12 יחידות שטח $=S_{ABC}$.

**33)** א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. 90 יח"ש $=S$.

**34)** א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$ , $(4,0)$ , $(5,5)$.

**35)** א. $C(-2,16)$ , $B(12,-2)$ ב. $y=-8x$.

**36)** א. $y=-2x+22$ ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון. ב. ii. $D(4,4)$ , $B(9,4)$.
ג. ii. $BC=10$ , $AD=5$. ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

**37)** א. $E(-1,0)$ , $A(-5,-2)$ , $D(-5,-8)$. ב. $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$ , $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ג. $C(5,-3)$. ד. 30 יח"ש $=S_{DEC}$.

**38)** א. $AC: y=-x+8$ , $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$. ב. $A(7,1)$.
ג. $BC: y=3x+10$ , $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

**39)** א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. 34 סמ"ר $=S_{DMC}=S_{BMC}$.

**40)** א. $y=x+6$ , $d_{BD}=\sqrt{200}$ ב. $F(3,9)$ , $E(5,11)$
ג. $d_{AE}=\sqrt{8}$ , $d_{CF}=\sqrt{72}$ ד. $S_{ABCD}=80$.

**41)** א. $C(t,t-5)$. ב. i. $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$ , $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$
ii. 10 ס"מ $=BC$ , $t=8$ ג. $D(-20,-5)$.

**42)** א. $x=-2$ ג. i. $y=-0.5x+10$ ii. $D(0,10)$ ד. i. $E(2,4)$
ii. $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

**43)** א. $y=2$ , $x=9$ ב. $C(10,0)$ , $C(8,0)$ ג. $C(8,0)$.

# שיטות כמותיות

## פרק 22 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

### תוכן העניינים


1. הכרות עם משוואת המעגל ..... 214
2. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע ..... 218
3. מיתר המחבר שתי נקודות השקה ..... 219
4. מעגל המשיק לצירים ..... 220
5. משוואות המשיקים למעגל ..... 222
6. משיק למעגל ..... 224
7. נושאים מתקדמים במעגל ..... (ללא ספר)
8. שאלות יסודיות שונות ..... 225
9. שאלות מסכמות שונות ..... 232

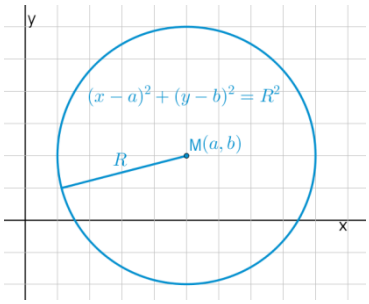
# הכרות עם משוואת המעגל:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

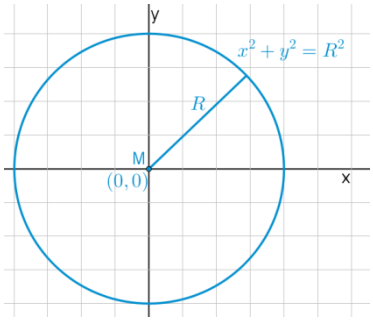
**משוואת מעגל:**




משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a,b)$

ורדיוסו $R$ היא: $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$.

**משוואת מעגל קנוני:**




משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0,0)$)

ורדיוסו $R$ היא: $x^2+y^2=R^2$.

## שאלות:

**1)** מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

**2)** כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם $R$:

א. $M(4,-2)\ ,\ R=3$

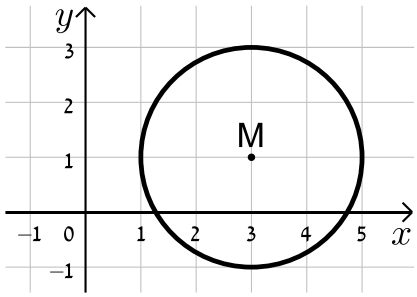
ב. $M(-3,5)\ ,\ R=10$

ג. $M(5,5)\ ,\ R=\sqrt{40}$

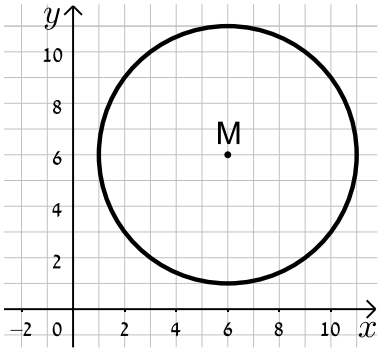
ד. $M(10,-12)\ ,\ R=\sqrt{30}$

**3)** כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

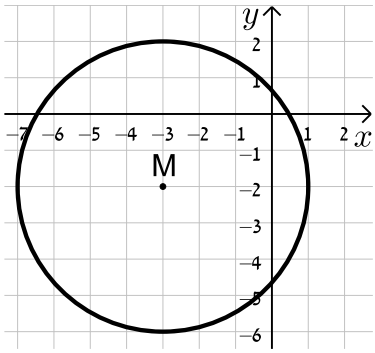
א.



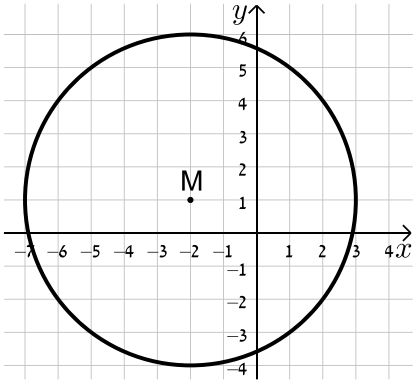

ב.




ג.




ד.




**4)** מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

**5)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=9$.

**6)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=3$.

**7)** מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

**8)** מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו-$B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

**9)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$ , רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה-$x$ מיתר שאורכו 12.

**10)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4,-3)$ אם ידוע כי הישר $y=-3x+7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

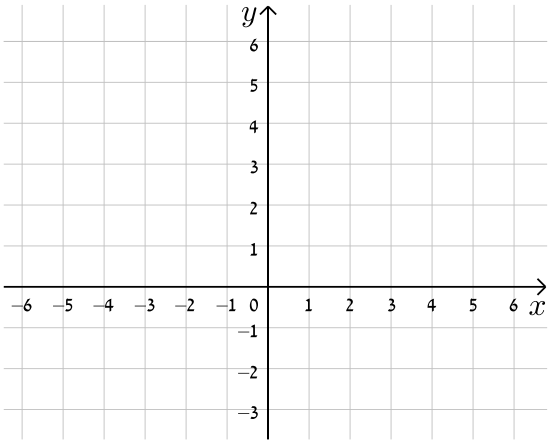
**11)** מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם $A(22,-24)$ , $B(-10,40)$ , $C(-30,28)$.

**12)** נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$ , האחד הוא בעל רדיוס $R$ והשני בעל רדיוס של $2R$.

א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות $R$).

ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R=2$ ?

ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.




**13)** שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6,2)$ ו-$M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

**14)** נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2+y^2-10x-10y+a=0$ כאשר $a$ פרמטר.

א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות $a$.

ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור $a$ ?
נמק ומצא את תחום ההגדרה של $a$.

i. $a=5$.

ii. $a=55$.

## תשובות סופיות:

1) א. $M(3,-5)\ ,\ R=7$ ב. $M(-0.5,0)\ ,\ R=\sqrt{10}$

ג. $M(m,-n)\ ,\ R=\sqrt{m^2+n^2}$ .

2) א. $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ב. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=40$ ד. $(x-10)^2+(y+12)^2=30$ .

3) א. $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ ב. $(x-6)^2+(y-6)^2=25$

ג. $(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ד. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ .

4) $(x-2)^2+(y+1)^2=72\ ,\ M(3,-3)$ .

5) $(x+5)^2+(y-6)^2=232$ .

6) $x^2+(y+7)^2=100$ .

7) $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y+14.6)^2=169$ .

8) $(x-1)^2+y^2=18$ .

9) $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$

10) $(x-4)^2+(y+3)^2=4\frac{2}{5}$ .

11) $(x+2)^2+(y-4)^2=1360$ .

12) א. $(x-3)^2+(y+1)^2=4R^2\ ,\ (x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

ב. $(x-3)^2+(y+1)^2=16\ ,\ (x-3)^2+(y+1)^2=4$ .

13) $(x-6)^2+(y-2)^2=65\ ,\ (x+3)^2+(y+4)^2=50$

14) א. $R=\sqrt{50-a}$ ב. $a=5$ , ת.ה: $a<50$ .

# כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

## שאלות:

**1)** מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2+10x+y^2+6y-2=0$

ב. $x^2-2x+y^2+20y+1=0$

ג. $x^2-8x+y^2-14y=0$

ד. $x^2+y^2+2y=0$

ה. $x^2+x+y^2-3\frac{3}{4}=0$

ו. $x^2-2mx+y^2+6my+m^2=0$

**2)** משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-6mx-2(m+2)y+4m+4=0$.
מצא את ערכו של $m$ אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y=2x+7$.

**3)** משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-8x+12y-48=0$.
מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y=2x-4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $M(-5,-3)\ ,\ R=6$

ב. $M(1,-10)\ ,\ R=10$

ג. $M(4,7)\ ,\ R=\sqrt{65}$

ד. $M(0,-1)\ ,\ R=1$

ה. $M\left(-\frac{1}{2},0\right)\ ,\ R=2$

ו. $M(m,-3m)\ ,\ R=3m$.

**2)** $m=-1$.

**3)** $2\sqrt{80}$.

# מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

## סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים

למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1,y_1)$ שמחוץ

למעגל היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

## שאלות:

**10)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+y^2+2x-19=0$,
המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3,8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$, המחבר
את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5,1)$.

**11)** נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x+48=0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק
החיובי של ציר ה- $y$. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים
היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה- $y$ בנקודה Q. נתון: $PQ=14$.
מצא את שיעורי הנקודה Q.

## תשובות סופיות:

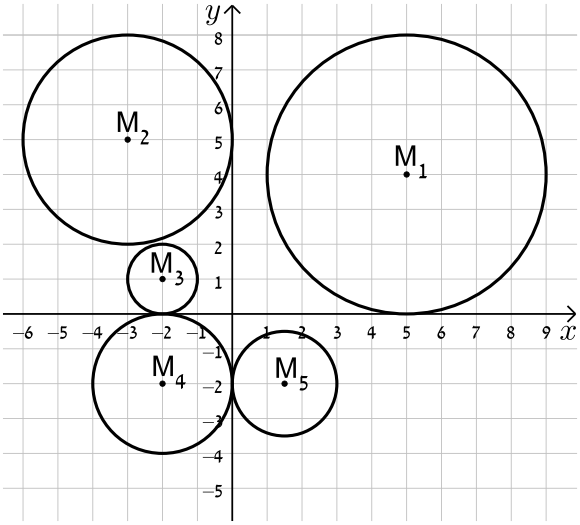
**10)** א. $x-4y+11=0$ ב. $x=-1$.

**11)** $Q(0,-8)$ או $Q(0,-6)$.

# מעגל המשיק לצירים:

## שאלות:

**15)** כתוב את משוואות המעגלים הבאים:




**16)** מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

**17)** מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה-$x$ ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

**18)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x+3y+6=0$ והוא משיק לשני הצירים.

**19)** מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה-$y$ ולישר $y=6$ ומרכזו על הישר $y=3x-2$ ברביע הראשון.

## תשובות סופיות:

**15)** $M_1:(x-5)^2+(y-4)^2=16$ , $M_2:(x+3)^2+(y-5)^2=9$ , $M_3:(x+2)^2+(y-1)^2=1$ , $M_4:(x+2)^2+(y+2)^2=4$ , $M_5:(x-1.5)^2+(y+2)^2=2\frac{1}{4}$.

**16)** $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$.

**17)** $(x-16)^2+(y-8)^2=64$.

**18)** $(x-6)^2+(y+6)^2=36$ , $\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+1\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$.

**19)** $(x-2)^2+(y-4)^2=4$.

# משוואות המשיקים למעגל:

## שאלות:

**4)** מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1,8)$ המשיק לשני הצירים.

**5)** מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+14y+37=0$ היוצא מהנקודה $A(10,-3)$.

**6)** מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ בנקודה $A(5,-4)$.

**7)** מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$ בנקודות שבהן $x=-1$.

**8)** נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2,6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.

א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.

ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.

**9)** נתון המעגל $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ והישר $y=2x+m$.

לאלו ערכים של הפרמטר $m$ הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של $m$ הישר חותך את המעגל?

## תשובות סופיות:

4) $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ או $(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

5) 8.

6) משיק: $y=3x-19$ , נורמל: $x+3y+7=0$.

7) $(-5,1)$.

8) שאלת הוכחה.

9) משיק: $m=-9,11$ , חותך: $-9<m<11$.

# משיק למעגל:

## סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ בנקודה $A(x_1,y_1)$
שעליו היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

## שאלות:

**20)** מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

**21)** נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ ומשוואת הישר $y=2x+m$ כאשר $m$ פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של $m$ הישר ישיק למעגל ולאלו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

## תשובות סופיות:

**20)** $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$.

**21)** משיק: $m=11,-9$ , חותך: $-9<m<11$.

## שאלות יסודיות שונות:

### שאלות:

**22)** נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

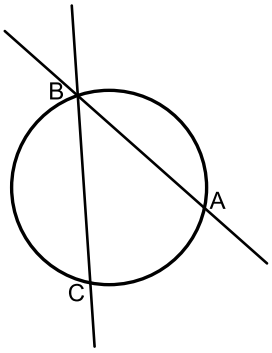
ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה-$x$.
מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

**23)** נתון ישר שמשוואתו $y=2x-10$. הישר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה A ואת ציר ה-$y$ בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו.
המשיק חותך את ציר ה-$y$ בנקודה C.
מצא את אורך הקטע BC.

**24)** נתון המעגל שמשוואתו $x^2+y^2=81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה-$x$. הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C.
מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו- O (O ראשית הצירים).

**25)** נתון ישר שמשוואתו $y=x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=32$ בשתי נקודות, A ו-B , כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס.
מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

**26)** הישרים: $9y+11x=94$ ו- $y=-3x+14$ נחתכים בנקודה B.
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9,1)$.
ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

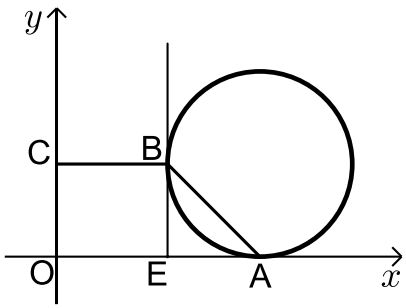



א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

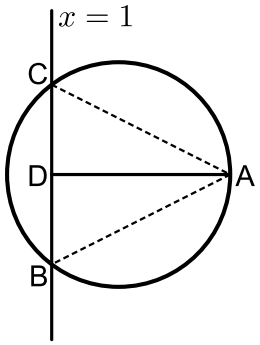
ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y=-3x+14$ עם המעגל.

**27)** נתון מעגל המשיק לציר ה-$x$ בנקודה A.
מהנקודה E שעל ציר ה-$x$ מעלים אנך המשיק למעגל בנקודה B (ראה איור).
הקטע BC מקביל לציר ה-$x$ ו-O היא נקודת ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית ABCO ששטחו הוא 170 סמ"ר.
ידוע כי: $C(0,10)$ ו- 10 ס"מ $= AE$.



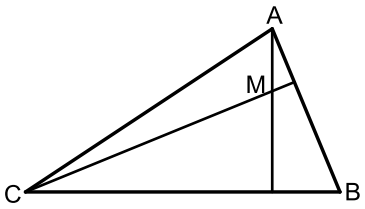

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את שיעורי הנקודה B.
ii. מצא את שיעורי הנקודה A.
ב. כתוב את משוואת המעגל.

**28)** הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו: $(x-7)^2+(y-4)^2=R^2$.
הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.



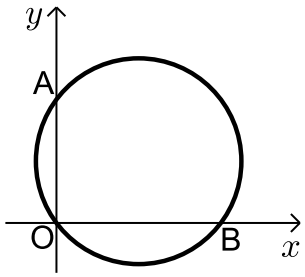

א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר: $x=1$
ii. חשב את שטח המשולש ABC.

**29)** נתון משולש ABC. משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן בהתאמה: $2y-x=56$ ו- $8y+x=104$.
מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה $M(0,-2)$ שבתוך המשולש.




א. מצא את משוואות הגבהים.
ב. מצא את שיעורי הנקודה B.
ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.

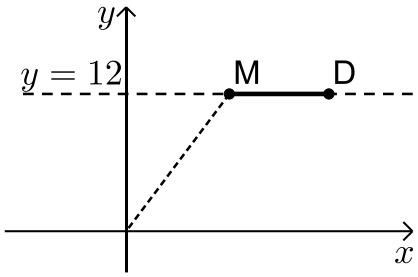
**30)** באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.
המעגל חותך את הצירים בנקודות A , B ו-O.




א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
ג. חשב את היקף המלבן.

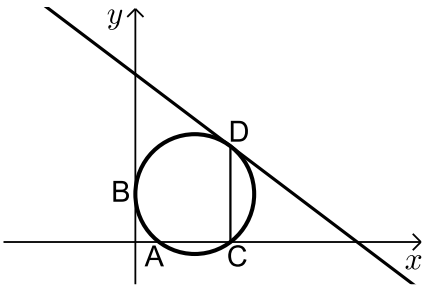
**31)** המעגל: $(x+a)^2+(y-1)^2=a+4$ , $a>0$ חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה: $x=1$.
א. מצא את $a$.
ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

**32)** הנקודות M ו-D נמצאות על הישר $y=12$ ידוע כי שיעור ה-$x$ של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב- 6 מהמרחק בין הנקודות D ו-M (ראה איור).
בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.



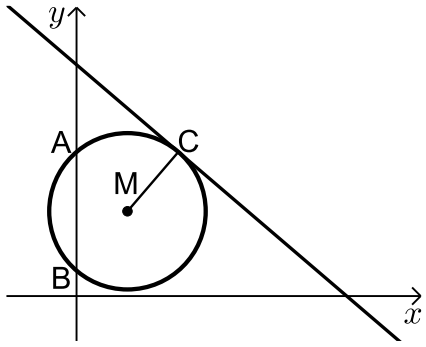

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
ii. מצא את שיעור ה-$x$ של הנקודה D.
ב. כתוב את משוואת המעגל.
ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

**33)** מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה-$y$ בנקודה B וחותך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



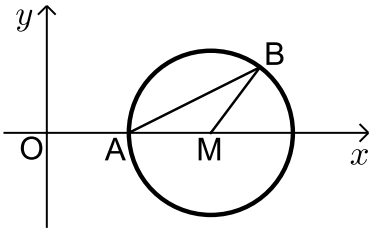

א. כתוב את משוואת המעגל.
מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-$x$ שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.
דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

**34)** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.
המעגל חותך את ציר ה- $y$ בנקודות A ו-B.
מעבירים משיק למעגל: $6x+7y=191$
דרך הנקודה: $C(12,17)$.



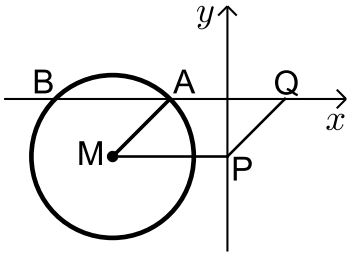

א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.
ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר $y=10$.
i. מצא את שיעורי הנקודה M.
ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.
iii. כתוב את משוואת המעגל.
ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $y$.
ד. חשב את שטח המשולש AMB.

**35)** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על ציר ה- $x$. המעגל חותך את ציר ה- $x$ בנקודה A.
מסמנים את ראשית הצירים ב-O.
ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5,0)$.



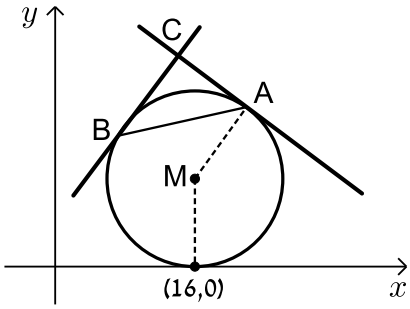

א. מצא את משוואת המעגל.
ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.
ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.
ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב את שטח המשולש AMB.

**36)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו
היא: $(x+4)^2+(y+2)^2=8$.
מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$ ב-A ו-B (ראה איור).




א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
מעבירים אנך לציר ה- $y$ מנקודת מרכז המעגל M
ומסמנים את חיתוכם ב- P.
ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.
ג. כתוב את משוואת הישר PQ.
ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל בנקודה $(-2,-4)$.

**37)** נתון מעגל שרדיוסו R $(R<16)$ ומשיק לציר ה-$x$ בנקודה שבה: $x=16$.




א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה-$y$ או לא. נמק.

מהנקודה $A(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה $x_B < x_M$ אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

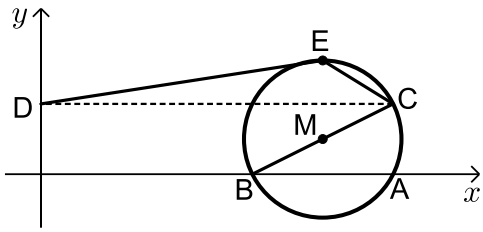
ה. המשיקים נחתכים בנקודה C.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. מצא את שטח המשולש ABC.

**38)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x+a)^2+(y-1)^2=5$ , $a$ פרמטר.

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה-$x$ בנקודה $A(10,0)$.




א. מצא את $a$ אם ידוע כי $a>-10$.

ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה-$x$.

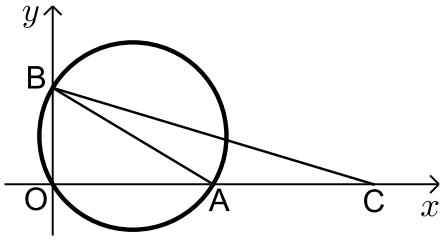
ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה-$y$ בנקודה D.
הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה-$y$ הגדול ביותר על המעגל.
מחברים את הנקודות E ו-D כך שנוצר המחומש DECBO. חשב את שטחו.

**39)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x-5)^2+(y-3)^2=R^2$ , $R$ רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.




א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה-$x$ כך ש-A היא אמצע הקטע CO.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. חשב את שטח המשולש ABC.

## תשובות סופיות:

**22)** א. $(0,-8)$ , $(6,0)$ , $(0,0)$ ב. 27 יח"ש.

**23)** 12.5 יחידות אורך.

**24)** $\sqrt{80}$ יח"ש $= S_{\Delta BOC}$.

**25)** $(x-8)^2+(y-8)^2=32$ , $y=-x+8$.

**26)** א. $(2,8)$ ב. $(x+9)^2+(y-1)^2=170$ ג. $(4,2)$.

**27)** א. i. $B(12,10)$ ii. $A(22,0)$ ב. $(x-22)^2+(y-10)^2=100$.

**28)** א. $R=10$ ב. $B(1,-4)$ , $C(1,12)$ ג. i. $d=16$

ii. $S=128$

**29)** א. $y=-2x-2$ , $y=8x-2$ ב. $(-24,16)$ ג. $x^2+(y+2)^2=900$.

**30)** א. $B(8,0)$ , $A(0,6)$ , $O(0,0)$ ב. $C(8,6)$ ג. 28 יח"א $= P$.

**31)** א. $a=1$ ב. $(-2,3)$ , $(0,-1)$ ג. $y=-2x-1$

ד. $S=\frac{1}{4}$.

**32)** א. i. $d=15$ ii. $x=18$. ב. $(x-9)^2+(y-12)^2=81$.

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה-$x$ -כאשר מציבים ב- $y$ אפס מתקבלת משוואה ריבועית ללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה-$x$ בנקודה אחת- $(12,0)$.

**33)** א. $(x-15)^2+(y-12)^2=225$ ב. $C(24,0)$ , $D(24,24)$. ג. $y=-\frac{3}{4}x+42$.

**34)** א. $y=\frac{7}{6}x+3$ ב. i. $M(6,10)$ ii. $\sqrt{85}$

iii. $(x-6)^2+(y-10)^2=85$ ג. $A(0,17)$ , $B(0,3)$ ד. 42 יח"ש.

**35)** א. $(x-10)^2+y^2=25$ ב. $y=0.5x-2.5$ ג. $B(13,4)$

ד. 10 יח"ש $= S_{AMB}$.

**36)** א. $A(-2,0)$ , $B(-6,0)$ ב. $Q(2,0)$ ג. $y=x-2$ .

**37)** א. $(x-16)^2+(y-R)^2=R^2$ , המעגל אינו חותך את ציר ה- $y$ .

ב. $R=10$ , $(x-16)^2+(y-10)^2=100$ ג. $y=-\frac{3}{4}x+34\frac{1}{2}$

ד. $y=\frac{4}{3}x+5\frac{1}{3}$ ה. i. $C(14,24)$ ii. 50 יח"ש.

**38)** א. $a=-8$ ב. $B(6,0)$ ג. $y=0.5x-3$

ד. $(10,2)$. ה. $11+5\sqrt{5}$ יח"ש $=S_{DECBO}$ .

**39)** א. $R=\sqrt{34}$ יחידות אורך , $(x-5)^2+(y-3)^2=34$ . ב. $A(10,0)$ , $B(0,6)$

ג. i. $C(20,0)$. ii. 30 יח"ש $=S_{ABC}$ .

# שאלות מסכמות שונות:

## שאלות:

**12)** נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x-12y+64=0$ . המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

**13)** המעגלים $x^2+y^2+22x-6y=m$ ו- $x^2+y^2=26$ נחתכים בזווית ישרה.
מצא את ערכו של $m$ .

**14)** בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x-y-9=0$ והשוק AD מונחת על הישר $x+y-3=0$ .
שיעורי הקודקוד B הם $(3,-8)$ .
מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

**15)** מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x-y+10=0$ .

## תשובות סופיות:

**12)** $4x-3y+20=0$ , $A(-3.2,2.4)$ , $x^2+y^2=16$ .

**13)** $m=-26$ .

**14)** $(x-1)^2+(y+4)^2=20$ .

**15)** $(x+3)^2+(y-1)^2=10$ .

# שיטות כמותיות

## פרק 23 - וקטורים גיאומטריים

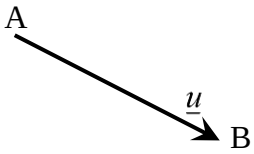
### תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים ..... 233
2. וקטורים הפורשים מישור ..... 238
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור ..... 242

# הגדרות וכללים יסודיים:

## סיכום כללי:

**הגדרה כללית:**



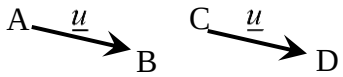

להלן תיאור של וקטור גיאומטרי: וקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן וקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).

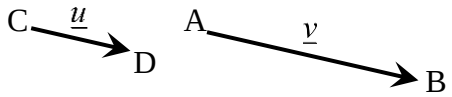
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

**קשרים בין וקטורים:**

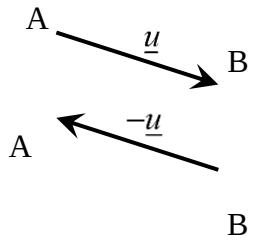
- וקטורים שווים: שני וקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
  דוגמא לוקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.




- וקטורים מקבילים: שני וקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
  ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
  וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית".
  דוגמא לתלות בין וקטורים מקבילים:
  עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.




- אם זוג וקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ מקבילים
  אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.



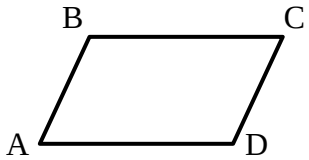

- וקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לוקטור $\overrightarrow{AB}$
  וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

**הערה:**

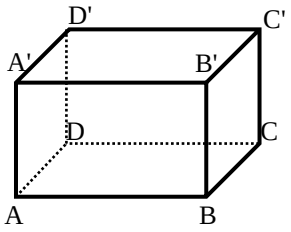
שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ כאשר הגודל $\alpha$ יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב- $180°$.

## שאלות:

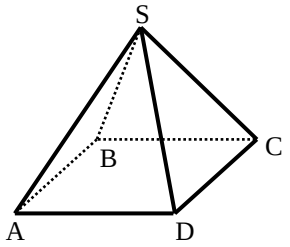
**1)** במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



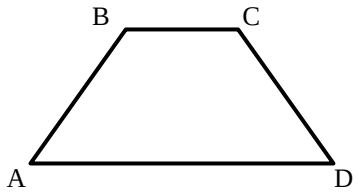

**2)** בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ .
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.




**3)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ .
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.




**4)** בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.

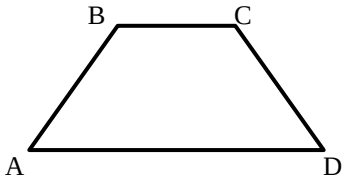



**5)** בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

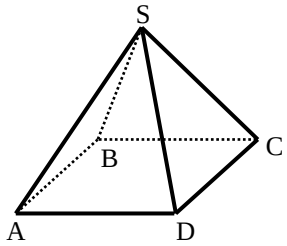
ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



**6)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .




א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

**7)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$ . נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

**8)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$ . נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$ .

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

**9)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$ . נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .

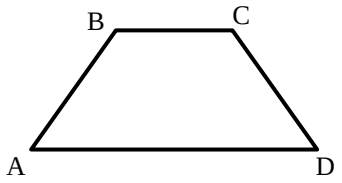
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

**10)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$ . נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

**11)** בטרפז ABCD שבשרטוט

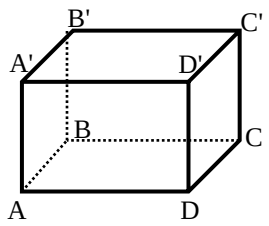
נתון: $AD=3BC$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .




הנקודה F נמצאת על הצלע CD

ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$ .

הבע באמצעות $\underline{u}$ , $\underline{v}$ ו- $\beta$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$ .

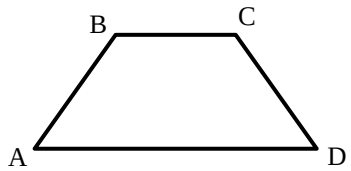



**12)** בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

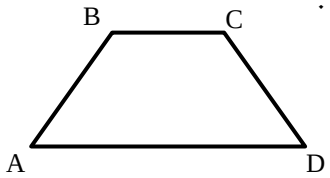



**13)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של $\alpha$ שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$ .

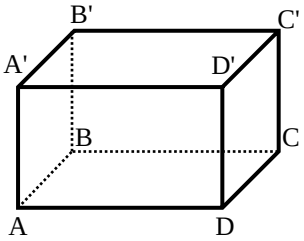



**14)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של $\alpha$ שבעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AC}$.




**15)** בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי $\alpha$ ו- $\beta$ שבעבורם $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה ABB'A'.
מצא את ערכי $\alpha$ ו- $\beta$ אם נתון כי $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{EC}$.

## תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$ , $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$ , $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$ , $\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$ , $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ , $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ ג. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$.

6) א. $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$ , $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$ , $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$ , $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$ , $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

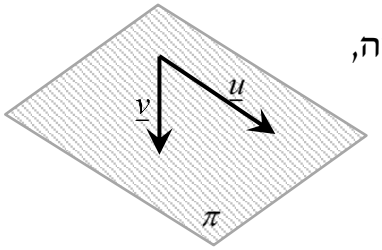
14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. לא ג. $\beta=1$ , $\alpha=\frac{1}{2}$.

# ווקטורים הפורשים מישור:

## סיכום כללי:

**ווקטורים הפורשים מישור:**




כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים

את המישור $\pi$.

**קומבינציה לינארית של ווקטורים:**

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

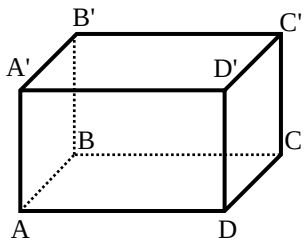
**דוגמא:**

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל

למישור $\pi$ באופן הבא: $\underline{w}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}$ כאשר: $\alpha,\ \beta$ מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$ , $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

## שאלות:




**16)** בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .

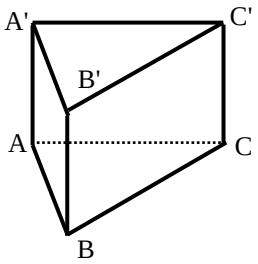
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

א. הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ .

ב. מהו ערכו של $\alpha$ שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של $\beta$ שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?




**17)** נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'

ובה נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .

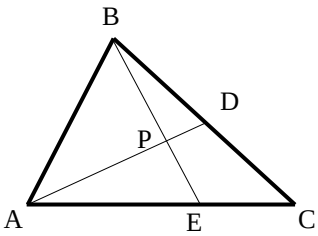
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'}=\alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC}=\beta$ .

א. הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את הווקטור $\overrightarrow{NM}$ .

ב. מהו ערכו של $\beta$ שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'.
הבע את $\alpha$ באמצעות $\beta$ .




**18)** במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$ .

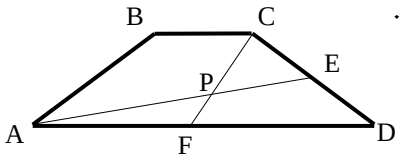
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$ , $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$ .

א. הבע באמצעות $\underline{u}$ , $\underline{v}$ , $t$ ו- $s$ את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.

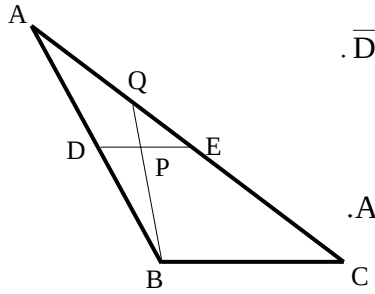
**19)** בטרפז ABCD, ( $AD \parallel BC$ ) שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$ .
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF.
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



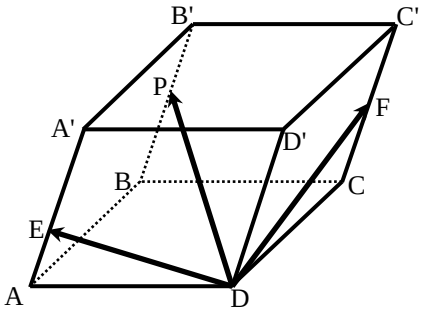

**20)** במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$ .
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$ .




**21)** במקבילון ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$ , $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$ , $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$ .
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',
הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$ .
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$ .




א. הבע באמצעות $\underline{w}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$ ו- $k$ את הווקטור $\overrightarrow{DP}$ .

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D , E, F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.

## תשובות סופיות:

**16)** א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. $\alpha=1$ ג. לא.

**17)** א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta\right)\underline{v}+\underline{w}$ ב. $\beta=1$ ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$

**18)** א. $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$ , $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$ ב. $BP:PE=3:2$ , $AP:PD=4:1$

**19)** $AP:PE=2:1$ , $CP:PF=2:1$

**20)** א. $AQ:QC=1:2$ ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$

**21)** א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$ ב. $B'P:PB=1:5$ ג. כן.

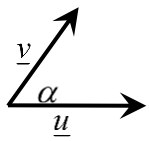
# מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

## סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר $\alpha$ היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.




ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.

**הערה:**

המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

## שאלות:

**22)** חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|\underline{u}|=3$ , $|\underline{v}|=2$ , $\alpha=60°$

ב. $|\underline{u}|=4$ , $|\underline{v}|=5$ , $\alpha=120°$

ג. $|\underline{u}|=2$ , $|\underline{v}|=6$ , $\alpha=30°$

ד. $|\underline{u}|=8$ , $|\underline{v}|=3$ , $\alpha=180°$

ה. $|\underline{u}|=3$ , $|\underline{v}|=5$ , $\alpha=0°$

ו. $|\underline{u}|=7$ , $|\underline{v}|=4$ , $\alpha=90°$

**23)** חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $|\underline{u}|=3$ , $|\underline{v}|=4$ , $\underline{u}\cdot\underline{v}=6$

ב. $|\underline{u}|=4$ , $|\underline{v}|=2$ , $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}$

ג. $|\underline{u}|=9$ , $|\underline{v}|=5$ , $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$

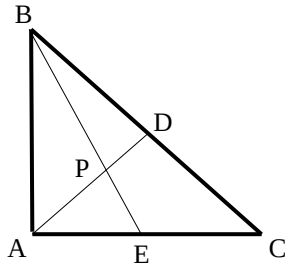
ד. $|\underline{u}|=2$ , $|\underline{v}|=6$ , $\underline{u}\cdot\underline{v}=12$

**24)** נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$ , $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

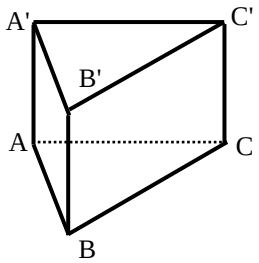
**25)** נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$ , $|\underline{v}|=5$ .
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

**26)** נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$ , $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$ , $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$ .

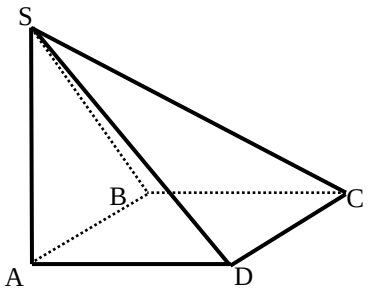
**27)** המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90°$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$ , $AB=8$ , $AC=12$ .
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



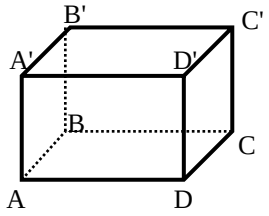

**28)** נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C'
שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$ .
נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.




**29)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$ .
נסמן: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ .
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.



**30)** בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ , $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$ .




הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של $\alpha$ שבעבורו מתקיים: $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{5}{6}\left|\overrightarrow{AQ}\right|$ ?

ב. הבע באמצעות $\alpha$ את $\cos\sphericalangle PAQ$
והראה כי לכל ערך של $\alpha$ הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של $\alpha$ שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת: $\cos\sphericalangle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$ ?

**31)** הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ .

**32)** נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$ .

**33)** נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ .

**34)** נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$ .

**35)** נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$ .
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$ .

**36)** הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

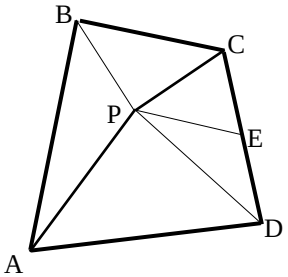
**37)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.
הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$).

**38)** הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD
כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים
ישרי זווית וש"ש ($AP=PD$ , $BP=PC$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$ , $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$ , $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$ , $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$).




**39)** בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ , $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ , $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$ .
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין $\alpha$ ו- $\beta$ שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$ , $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$ . הוכח: $AB=AC$.

**40)** נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

## תשובות סופיות:

**22)** א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.

**23)** א. $60°$ ב. $150°$ ג. $90°$ ד. $0°$.

**24)** $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 18.248$

**25)** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{29}$

**26)** $31.87°$

**27)** $55.49°$

**28)** $70.623°$

**29)** $24.095°$

**30)** א. $\alpha = \frac{3}{4}$ ב. $\cos\left(\sphericalangle PAQ\right) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha = \frac{1}{2}$

**31)** שאלת הוכחה.

**32)** שאלת הוכחה.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** שאלת הוכחה.

**35)** שאלת הוכחה.

**36)** שאלת הוכחה.

**37)** שאלת הוכחה.

**38)** שאלת הוכחה.

**39)** א. $\alpha + 2\beta = 1$ ב. שאלת הוכחה.

**40)** שאלת הוכחה.

# שיטות כמותיות

## פרק 24 - וקטורים אלגבריים

### תוכן העניינים


1. גודל של וקטור ..... 247
2. הצגה פרמטרית של ישר ..... 248
3. הצגה פרמטרית של מישור ..... 251
4. וקטורים מקבילים ושווים ..... 253
5. זווית בין וקטורים ..... 254
6. זווית בין ישר ומישור ..... 255
7. זווית בין שני ישרים ..... 256
8. זווית בין שני מישורים ..... 258
9. חישובי זוויות שונות ..... (ללא ספר)
10. חישובי מרחקים ..... (ללא ספר)
11. ישר חיתוך בין מישורים ..... 259
12. מישורים המקבילים לצירים ..... 260
13. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור ..... 261
14. מצב הדדי בין ישר ומישור ..... 262
15. מצב הדדי בין ישרים ..... 264
16. מצב הדדי בין מישורים ..... 267
17. מרחק בין ישר למישור ..... 268
18. מרחק בין ישרים מצטלבים ..... 269
19. מרחק בין ישרים מקבילים ..... 270
20. מרחק בין מישורים מקבילים ..... 271
21. מרחק בין נקודה לישר ..... 272
22. מרחק בין נקודה למישור ..... 273
23. מרחק בין שתי נקודות במרחב ..... 274
24. משוואת מישור ..... 275
25. סיכום מרחקים ..... (ללא ספר)
26. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים ..... 276

27. פעולות אלגבריות בין וקטורים ..... 280
28. שאלות מסכמות בוקטורים ..... 282
29. שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית ..... 285

# גודל של וקטור:

## סיכום כללי:

גודלו של ווקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

## שאלות:

**16)** נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(5,-1,0)$ , $\underline{u}=(1,-3,2)$.
חשב את הגדלים של הוקטורים הבאים: $4\underline{u}-3\underline{v}$ , $2\underline{v}+\underline{u}$ , $\underline{v}$ , $\underline{u}$.

**17)** נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$ , $B(0,2,-1)$ , $C(-3,-5,0)$ , $D(-7,-5,2)$
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

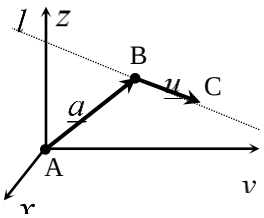
## תשובות סופיות:

**16)** $|4\underline{u}-3\underline{v}|=\sqrt{266}$ ; $|2\underline{v}+\underline{u}|=\sqrt{150}$ ; $|\underline{v}|=\sqrt{26}$ ; $|\underline{u}|=\sqrt{14}$.

**17)** הוכחה.

# הצגה פרמטרית של ישר:

## סיכום כללי:




ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא וקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור $\underline{u}$ נקרא וקטור הכיוון של הישר.

זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר $t$ הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של $t$ שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר $l$.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$ , $B(5,3,1)$ ו-$C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$ ; $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l : \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$.

**הערות:**

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת וקטור ההעתקה וקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l : \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת $t_0$ בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת $t_1$ בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני וקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים וקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

## שאלות:

**23)** האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

**24)** האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=t(2,-1,5)$?

**25)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו-$B(1,6)$.

**26)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו-$D(4,1,1)$.

**27)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell : \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

**28)** מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

**29)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות $x$, $y$ ו- $z$.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$ , $y=10$ , $z=4-t$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

**30)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- $y$ במרחב.

**31)** מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- $z$.

**32)** מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

## תשובות סופיות:

23) כן.

24) לא.

25) $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$.

26) $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$.

27) $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$.

28) $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$.

29) א. $x = 1 + 4t \ , y = 2 + 5t \ , z = 3 + 6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$.

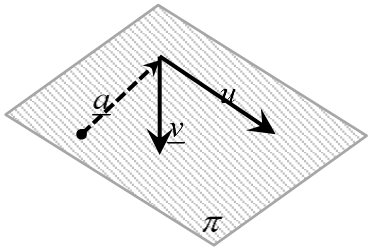
30) $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$.

31) $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$.

32) $(7,-5,0)$.

# הצגה פרמטרית של מישור:

## סיכום כללי:




מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור ההעתקה.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם וקטורי הכיוון של המישור.
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר $t,s$ הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור $\pi$.

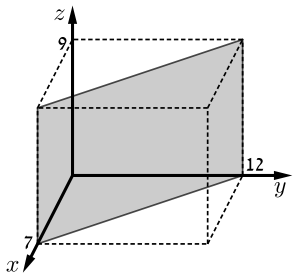
## שאלות:

**41)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:
$A(1,-4,0)$ , $B(3,6,2)$ , $C(0,-3,1)$.

**42)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2,-2,5) + t(1,0,-4)$ .

**43)** נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (0,1,-1) + t(1,9,-3)$ , $\ell_2 : \underline{x} = (2,16,11) + s(0,1,-6)$.
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

**44)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$ ומכיל את ציר ה-$x$.




**45)** מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

**46)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המסומן.

## תשובות סופיות:

41) $\pi : \underline{x} = (1,-4,0) + t(2,10,2) + s(-1,1,1)$.

42) $\pi : \underline{x} = (-2,-2,5) + t(1,0,-4) + s(8,9,-6)$.

43) $\pi : \underline{x} = (0,1,-1) + t(1,9,-3) + s(0,1,-6)$.

44) $\pi : \underline{x} = t(1,0,0) + s(5,-2,-1)$.

45) $\pi : \underline{x} = t(1,0,0) + s(0,0,1)$.

46) $\pi : \underline{x} = (7,0,0) + t(0,0,1) + s(-7,12,0)$.

# וקטורים מקבילים ושווים:

## שאלות:

**18)** נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:

$A(1,2,0)$ , $B(-2,5,3)$ , $C(-1,8,4)$ , $D(4,3,-1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**19)** נתונות הנקודות הבאות: $A(1,0,2)$ , $B(3,7,-4)$ , $C(6,9,0)$ , $D(7,4,10)$ , $E(9,11,4)$.

א. הראה כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

## תשובות סופיות:

**18)** א. הוכחה. ב. כן.

**19)** א. הוכחה. ב. לא.

# זווית בין וקטורים:

## סיכום כללי:

- זווית $\alpha$ בין שני וקטורים $\underline{v}$ , $\underline{u}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

## שאלות:

**20)** חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$ , $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$ , $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$

**21)** מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $A(-3,2,1)$ , $B(0,3,2)$ , $C(5,-1,0)$.

**22)** נתונים הווקטורים: $\underline{v}=(5,0,3)$ , $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

## תשובות סופיות:

**20)** א. $92.277°$ ב. $90°$ ג. $180°$.

**21)** 10.173 יח"ש.

**22)** $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$.

# זווית בין ישר ומישור:

## סיכום כללי:

- זווית חדה $\alpha$ בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$
  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.

## שאלות:

**74)** מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$ , $\pi:\ 3x-2y+2z+9=0$.

**75)** נתונות הנקודות $A(1,-1,2)$ , $B(0,2,-1)$ , $C(1,2,5)$ , $D(-7,3,-1)$.
מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

**76)** נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה
היא: $2x+y-2z-6=0$. קדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקודקוד B מקיימים: $x_B=z_B=-1$.

## תשובות סופיות:

**74)** $18.87°$.
**75)** $44.83°$.
**76)** $14.9°$.

# זווית בין שני ישרים:

## סיכום כללי:

- זווית חדה $\alpha$ בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}\right|$.

## שאלות:

**70)** מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$ , $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$.

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$ , $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$.

**71)** מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3,4,6)$ , $B(6,0,-2)$ וישר העובר דרך הנקודות: $C(6,5,1)$ , $D(-1,4,2)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

**72)** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$ , $B(4,2,-1)$ , $C(3,-1,2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i. A ו-B.

ii. B ו-C.

iii. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

**73)** נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $A(x,6,1)$ , $B(-2,y,-1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצא את שיעורי הנקודה C אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

## תשובות סופיות:

**70)** א. $78.521°$ ב. $90°$.

**71)** $68.21°$. הישרים מצטלבים.

**72)** א. i. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. ii. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. iii. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

**73)** $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

# זווית בין שני מישורים:

## סיכום כללי:

- זווית חדה $\alpha$ בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
- תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

## שאלות:

**77)** מצא את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1:\ 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2:\ 4x-7y+5z+3=0$.

**78)** נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודיה הם:
$A(0,2,-5)$ , $B(3,-1,1)$ , $C(7,-1,-5)$ , $D(3,2,0)$.
מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

**79)** מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

## תשובות סופיות:

**77)** $90°$.
**78)** $87.539°$.
**79)** $32.312°$.

# ישר חיתוך בין מישורים:

## שאלות:

**64)** נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$ , $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

**65)** נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$ , $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

**66)** נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_6 : 5x-2z+20=0$ , $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

**67)** נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_8 : z-2=0$ , $\pi_7 : x-2y-z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

**68)** מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

**69)** נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$ , $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

## תשובות סופיות:

**64)** $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$.

**65)** $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$.

**66)** $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$.

**67)** $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$.

**68)** $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$.

**69)** $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$.

# מישורים המקבילים לצירים:

## שאלות:

**56)** נתונה משוואת מישור: $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של $k$ המישור מקביל לציר ה- $y$ (ולא מכיל אותו)?

**57)** פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

## תשובות סופיות:

**56)** $k=3$.

**57)** 6 יח"נ.

# מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

## שאלות:

**51)** נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x+3z-12=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

**52)** נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצא את משוואת המישור.

**53)** נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

**54)** המישור $\pi$ עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$ , $B(2,0,0)$ , $A(1,0,-3)$.
מצא את משוואת המישור.

**55)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$ , $(0,1,-2)$ , $(2,0,5)$.

i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

## תשובות סופיות:

**51)** $\pi: \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$.

**52)** $\pi: -2x+3y+z+19=0$.

**53)** $\pi: x-3y+8z=0$.

**54)** $\pi: 3x+6y-z-6=0$.

**55)** א. i. $\pi: \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ ii. $-2x+3y+z-1=0$

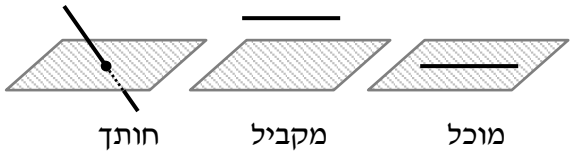
ב. למשל: $(0,0,1)$ , $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

# מצב הדדי בין ישר ומישור:

## סיכום כללי:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.




כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

## שאלות:

**58)** נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$ , $\pi : 2x-y-3z+6=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

**59)** נתונים הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$ , $\pi : x-3y+2z-11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

**60)** נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$ , $\pi : 2x+y+6z+11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

**61)** נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$ , $\pi : 2x-y+z-4=0$.
מצא את ערכי $a$ ו- $b$ בעבורם הישר מוכל במישור.

## תשובות סופיות:

**58)** הישר חותך, $(1,-1,3)$.

**59)** מקבילים.

**60)** הישר מוכל.

**61)** $a=1$ , $b=-7$ .

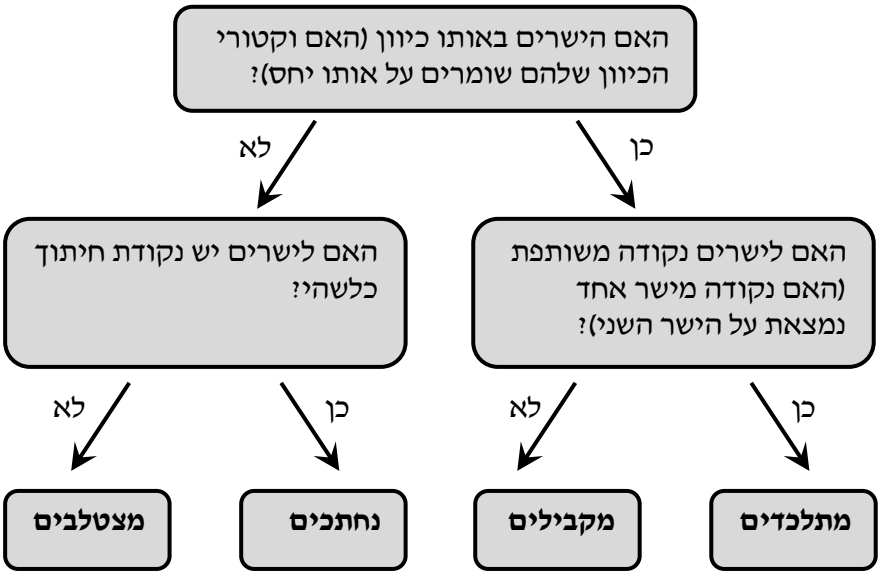
# מצב הדדי בין ישרים:

## סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## שאלות:

**33)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x}=(2,-3,0)+t(5,-1,2)$ , $\ell_2 : \underline{x}=(12,-5,4)+s(-10,2,-4)$ .

**34)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x}=(0,1,-7)+t(-2,1,1)$ , $\ell_4 : \underline{x}=(2,0,-6)+s(6,-3,-3)$ .

**35)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x}=(-3,5,1)+t(4,0,-1)$ , $\ell_6 : \underline{x}=(-1,7,4)+s(-1,1,2)$ .

**36)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x}=(3,0,0)+t(2,-2,5)$ , $\ell_8 : \underline{x}=(0,1,-5)+s(3,1,-2)$ .

**37)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x}=(-4,1,-1)+t(3,0,-1)$ , $\ell_{10} : \underline{x}=s(6,0,-2)$ .

**38)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x}=(2,8,-1)+t(1,0,0)$ , $\ell_{12} : \underline{x}=(-5,8,2)+s(2,0,-1)$ .

**39)** מצא את ערכו של הפרמטר $k$ שבעבורו הישרים הבאים:
$\ell_1 : \underline{x}=(k+1,1-k,6)+t(1,-2,2)$ , $\ell_2 : \underline{x}=(k-1,7,-k)+s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

**40)** נתונות הנקודות: $A(3,-1,5)$ , $B(k,-1,3)$ , $C(-6,3,-1)$ , $D(-2,3,k)$ .
הראה כי לכל ערך של $k$ הישרים $\ell_{AB}$ ו- $\ell_{CD}$ מצטלבים.

## תשובות סופיות:

33) מתלכדים.

34) מקבילים.

35) נחתכים, $(1,5,0)$.

36) מצטלבים.

37) מקבילים.

38) נחתכים, $(1,8,-1)$.

39) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

40) הוכחה.

# מצב הדדי בין מישורים:

## סיכום כללי:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא ישר החיתוך.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

| מתלכדים | מקבילים | נחתכים |
|---|---|---|
| $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ | $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ | כל מצב אחר |

## שאלות:

**62)** נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1:2x-y+4z-5=0$ , $\pi_2:4x-2y+8z-10=0$.

ב. $\pi_3:x+3y-z+1=0$ , $\pi_4:3x+9y-3z-8=0$.

ג. $\pi_5:5x-2y-2z+3=0$ , $\pi_6:2x+3y+z-5=0$.

**63)** נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1:2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$ , $\pi_2:4x+12y-4z+k^2-2=0$.

מצא את ערכי $k$ עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים.

## תשובות סופיות:

**62)** א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

**63)** א. $k\neq 2,-3$. ב. $k=-3$. ג. $k=2$.

# מרחק בין ישר למישור:

## סיכום כללי:

מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור.

## שאלות:

**89)** נתונה משוואת מישור: $4x-z+6=0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$ ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- $y$ ובין המישור הנתון.

**90)** נתונים ישר ומישור: $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$ , $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר $k$ שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

## תשובות סופיות:

**89)** א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.

**90)** א. הוכחה. ב. $k=2,4$.

# מרחק בין ישרים מצטלבים:

## סיכום כללי:

מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני.

## שאלות:

**95)** נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

**96)** נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצא את המרחק שביניהם.

**97)** מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- $z$.

## תשובות סופיות:

**95)** $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.

**96)** 1.567 יח"א.

**97)** $\sqrt{2}$ יח"א.

# מרחק בין ישרים מקבילים:

## סיכום כללי:

מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו.

## שאלות:

**87)** נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$ , $B(12,-5,2)$ , $C(6,1,4)$ , $D(12,11,-8)$ .

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

**88)** 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1) \quad , \quad l_2: \underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$$

$$l_3: \underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4: \underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

## תשובות סופיות:

**87)** א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

**88)** א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

# מרחק בין מישורים מקבילים:

## סיכום כללי:

מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
1. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
2. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

## שאלות:

**91)** נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

**92)** נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1: x-2y-2z+6=0$ , $\pi_2: x-2y-2z-12=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

**93)** נתונים שישה מישורים:
$\pi_1: 2x+y-2z-11=0$ , $\pi_2: x+2y+2z+5=0$ , $\pi_3: 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4: 2x+y-2z+7=0$ , $\pi_5: x+2y+2z-1=0$ , $\pi_6: kx+qy+z+p=0$
מצא את ערכי הפרמטרים $k$, $q$ ו- $p$ שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

**94)** כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

## תשובות סופיות:

**91)** $\pi_1: 3x-4y+5z+10=0$ , $\pi_2: 3x-4y+5z-30=0$.

**92)** $\pi_3: x-2y-2z-3=0$.

**93)** $k=2$ , $q=-2$ , $p=18,-12$.

**94)** $12x+4y-3z-136=0$.

# מרחק בין נקודה לישר:

## סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

## שאלות:

**81)** מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell: \underline{x} = t(2,0,-7)$.

**82)** נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$ , $B(2,-1,0)$ , $A(1,6,-1)$ .
חשב את שטח המשולש ABC.

**83)** על הישר $\ell: \underline{x} = (5,-2,0) + t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

## תשובות סופיות:

**81)** $\sqrt{54}$.

**82)** 12.75 יח"ש.

**83)** $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

# מרחק בין נקודה למישור:

## סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור: $\pi: ax+by+cz+d=0$ יחושב

ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

## שאלות:

**84)** מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

**85)** מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

**86)** נתונים ישר ומישור: $\pi: 2x+4y-4z+15=0$ , $\ell: \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

## תשובות סופיות:

**84)** $2\frac{1}{2}$.

**85)** $\pi: 3x-2y+z+21=0$ או $\pi: 3x-2y+z-7=0$.

**86)** $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

# מרחק בין שתי נקודות במרחב:

## סיכום כללי:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

## שאלות:

**80)** נתונות הנקודות: $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו-$C(k,-1,13-k)$.
מצא ערכי $k$ עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB=AC$.

## תשובות סופיות:

**80)** $k=8$ או $k=12$.

# משוואת מישור:

## סיכום כללי:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$,

כאשר: $(x,y,z)$ היא נקודה על המישור והמקדמים $a,b,c$ הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h}=(a,b,c)$.

## שאלות:

**47)** קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi:\ 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$ ב. $E(2,-1,1)$

**48)** מצא את ערכו של $k$ שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור: $\pi:\ kx-2y+(1+k)z+7=0$.

**49)** נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x+2y-z-9=0$.
מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

**50)** נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 4x+y-2z+8=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

## תשובות סופיות:

**47)** א. על המישור. ב. לא על המישור.

**48)** $k=3$.

**49)** $(0,0,-9)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(3,0,0)$.

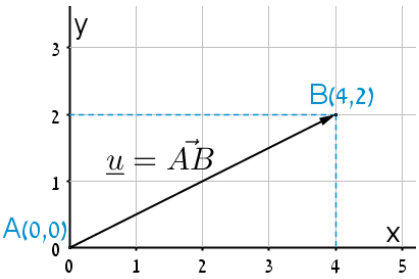
**50)** $\ell:\ \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$.

# שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

## סיכום כללי:

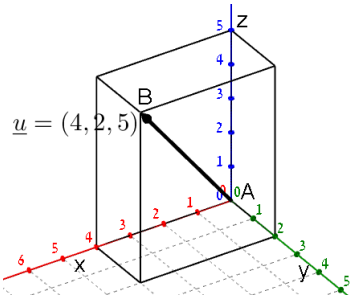
### הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: $(x,y)$ במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.




דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.




- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

### ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

### אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$ , $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$ , $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$ ; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ ; $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

## שאלות:

**1)** שרטט את הווקטורים הבאים:

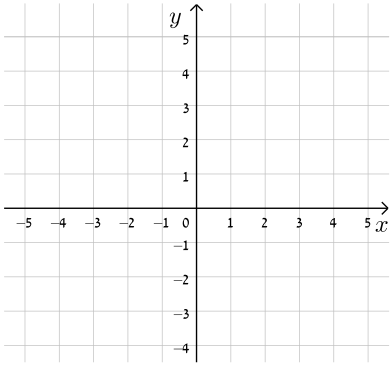
א. $\underline{u}=(4,2)$

ב. $\underline{v}=(-5,1)$

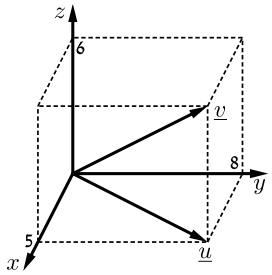
ג. $\underline{w}=(3,-4)$

ד. $\underline{a}=(0,3)$

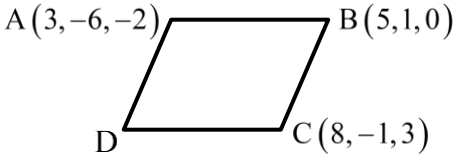
ה. $\underline{b}=(-5,0)$



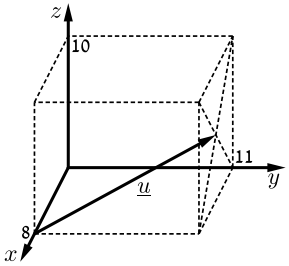

**2)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט.



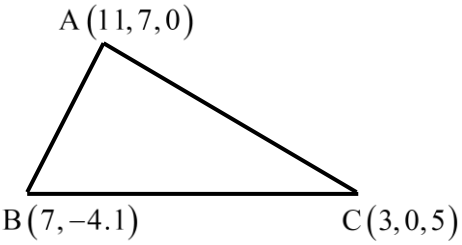

**3)** בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקודקוד D.




**4)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.




**5)** בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.




**6)** מצא את $x$ , $y$ ו- $z$ אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר:

$\underline{u}=(4,-1,2)$ , $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו-$B(6,1)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

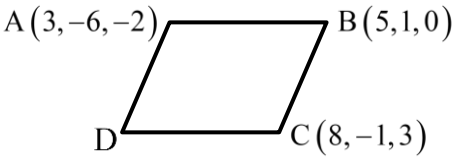
**8)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו-$F(7,-1,-3)$.

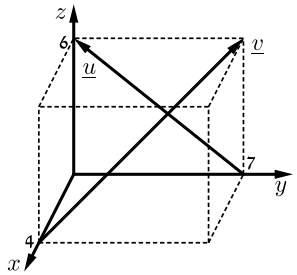
ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

**9)** בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקודקוד D.

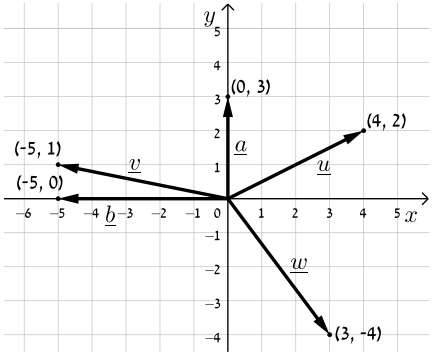



**10)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



## תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:




2) $\underline{v}=(5,8,6)$ , $\underline{u}=(5,8,0)$.

3) $D(6,-8,1)$.

4) $\underline{u}=(4,11,5)$.

5) $(7,1,2)$.

6) $x=5$ , $y=-2$ , $z=6$.

7) א. $\overrightarrow{AB}=(9,-4)$ ב. $Q(12,8)$.

8) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N(-1,-5,10)$.

9) $D(6,-8,1)$.

10) $\underline{v}=(-4,7,6)$ , $\underline{u}=(0,-7,6)$.

# פעולות אלגבריות בין וקטורים:

## סיכום כללי:

**מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:**

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר $\alpha$ היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$ , $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

## שאלות:

**11)** נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(-1,3,-5)$ , $\underline{u}=(4,0,9)$.
חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $3\underline{u}+2\underline{v}$ , $\underline{u}-2\underline{v}$ , $\underline{u}-\underline{v}$ , $\underline{u}+\underline{v}$.

**12)** נתונים הווקטורים: $\underline{w}=(2,6,-5)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$ , $\underline{u}=(-3,1,4)$.
חשב את:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$ ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

**13)** נתונות הנקודות הבאות: $C(3,-1,2)$ , $B(4,2,-1)$ , $A(1,-3,0)$.
מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

**14)** נתונים שלושה וקטורים: $\underline{w}=(x,5,-10)$ , $\underline{v}=(0,y,4)$ , $\underline{u}=(6,-1,z)$.

א. מצא את ערכם של $x,y,z$ המקיימים: $\underline{u}+2\underline{v}=\underline{w}$.

ב. מצא את ערכם של $x,y,z$ המקיימים: $2\underline{v}-3\underline{w}=\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$.

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{w}=(x,2z,-10)$, $\underline{v}=(y-1,2,x)$, $\underline{u}=(6,y,z)$?

**15)** נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$.

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{v}=(4,0,1)$ , $\underline{u}=(-6,2,3)$.

ב. מצא את $y$ עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:
$\underline{v}=(2,y,4)$ , $\underline{u}=(1,7,-6)$ תהיה 1-.

ג. מצא את $y$ עבורו הוקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

## תשובות סופיות:

**11)** $3\underline{u}+2\underline{v}=(10,6,17)$ ; $\underline{u}-2\underline{v}=(6,-6,19)$ ; $\underline{u}-\underline{v}=(5,-3,14)$ ; $\underline{u}+\underline{v}=(3,3,4)$.

**12)** א. $(6,-2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

ד. $(2.5,-1,-3.5)$ ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$

**13)** א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

**14)** א. $x=6$ , $y=3$ , $z=-18$ ב. $x=-1$ , $y=9\frac{2}{3}$ , $z=72$

ג. $z=-\frac{2}{9}$ , $y=-4\frac{4}{9}$ , $x=-4\frac{8}{9}$.

**15)** א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-21$ ב. $y=3$ ג. $y=3\frac{1}{7}$.

# שאלות מסכמות בוקטורים:

## שאלות:

**1)** נתונות הנקודות $A(1,1,3)$ , $B(1,2,0)$ , $C(1,1,1)$ .

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

**2)** מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$ , $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$ .

ב. $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$ , $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$ .

ג. $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$ , $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$ .

ד. $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$ , $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$ .

**3)** מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

א. $2x-3y+4z-5=0$ , $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$ .

ב. $2x-5y+3z-6=0$ , $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$ .

ג. $2x-14y+10z=-6$ , $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$ .

**4)** מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק בינים.
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$ , $x-2y+2z-10=0$ .

ב. $4x-10y+6z-8=0$ , $2x-5y+3z-6=0$ .

ג. $x-7y+5z=-3$ , $2x-14y+10z=-6$ .

**5)** נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא: $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

**6)** הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

**7)** נתונים מישור וישר: $\pi : 2x-y+2z+1=0$ , $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- $z$ הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

**8)** נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$ , $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור $\pi_1$ ובמרחק 6 ממישור $\pi_2$ (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

**9)** נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x+2y-z+5=0$ , $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, $\ell_2$, המקביל למישור $\pi$, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר $\ell_1$ בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור $\pi$, הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q. מצא את שטח המלבן PQQ'P'. (הדרכה: הבע באמצעות $t$ את וקטור הכיוון של $\ell_2$).

**10)** נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$ , $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$.
$\ell_1$ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור $\pi_3$ מכיל את הישר $\ell_1$ ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור $\pi_3$.

## תשובות סופיות:

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$ , הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$ , הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$ , זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$ , $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$.

# שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית:

## שאלות:

**מציאת משוואת מישור:**

**1)** נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2,2,1) + s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

**2)** המישור $\pi$ עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$ , $B(2,0,0)$ , $A(1,0,-3)$.
מצא את משוואת המישור.

**3)** נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x} = (0,-6,2) + s(0,-2,1)$ , $\ell_1 : \underline{x} = (5,-4,1) + t(0,2,-1)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

**4)** נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x} = (-7,1,0) + s(4,-3,0)$ , $\ell_1 : \underline{x} = (-1,1,3) + t(3,-2,4)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר $\ell_1$ ומקביל לישר $\ell_2$.

**5)** מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6,0,-1)$ ומכיל את ציר ה- $z$.

**מצב הדדי בין ישר ומישור:**

**6)** נתונים הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x} = (0,3,-2) + t(1,-1,2)$ , $\pi : \underline{x} = (-1,0,2) + s(1,0,-2) + r(3,0,-1)$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

**7)** נתונים שני המישורים הבאים: $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$ , $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

**מצב הדדי בין מישורים:**

**8)** במקבילון $ABCDA'B'C'D'$ נתונים שלוש הקודקודים הבאים:
$A(1,-1,4)$ , $B(9,0,2)$ , $C(5,2,-2)$.
מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה $A'B'C'D'$ אם ידוע שהנקודה $(2,-1,0)$ נמצאת עליו.

**מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים:**

**9)** המישורים $\pi_1$ ו-$\pi_2$ מאונכים זה לזה.
הישר $\ell : \underline{x}=(4,1,-1)+t(2,-1,1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.
מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור $\pi_1$ עובר בראשית.

**10)** נתונים ישר ומישור: $\pi : 4x-2y-3z-6=0$ , $\ell : \underline{x}=(-2,0,5)+t(3,1,-1)$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר $\ell$ על המישור.

**חישובי מרחקים שונים:**

**11)** חשב את נפחה של פירמידה משולשת $SABC$ שקודקודיה הם:
$A(1,6,-1)$ , $B(2,-1,0)$ , $C(6,-4,0)$ , $S(11,-2,4)$.

**12)** בפירמידה משולשת $SABC$ המקצועות $SA$, $SB$ ו-$SC$ מאונכים זה לזה.
נתון: $SA=6$ , $SB=8$ , $SC=12$.
חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד $S$ לבסיס $ABC$.

**13)** נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$
ו-$\ell_2 : \underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

**14)** נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$
ו-$\ell_4 : \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$. מצא את המרחק שביניהם.

**15)** מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה-$z$.

**שאלות שונות:**

**16)** נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x}=(-7,3,-1)+s(-5,4,-2)$ , $\ell_1 : \underline{x}=(-2,1,5)+t(5,-4,2)$ .

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור $\pi_1$ מכיל את שני הישרים והמישור $\pi_2$ נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור $\pi_1$.
מצא את משוואות המישורים $\pi_1$ ו-$\pi_2$.

**17)** נתונים שני מישורים: $\pi_2 : x-y+2z-4=0$ , $\pi_1 : 2x-y+4z-8=0$ .
המישור $\pi_3$ מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- $y$ בנקודה A כך שמתקיים $OA=m$ (O ראשית הצירים).
הזווית שבין המישור $\pi_2$ למישור $\pi_3$ היא $\alpha$ ונתון כי: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ .
מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר $m$.

**18)** נתונות שלוש נקודות: $O(3,1,0)$ , $B(2,-1,0)$ , $A(3,-1,1)$ .
הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.
מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A
(הישר נמצא במישור המעגל).

## תשובות סופיות:

1) $\pi:\ x-3y+8z=0$.

2) $\pi:\ 3x+6y-z-6=0$.

3) $\pi:\ y+2z+2=0$.

4) $\pi:\ 12x+16y-z-1=0$.

5) $\pi:\ y=0$.

6) נחתכים בנקודה: $(3,0,4)$.

7) $l:\underline{x}=t(1,9,13)$.

8) $\pi_{A'B'C'D'}:\ 2y+z+2=0$.

9) $\pi_1:\ y+z=0\ ,\ \pi_2:\ x+y-z-6=0$.

10) $l:\underline{x}=(-5,-13,0)+t(7,11,2)$.

11) 20.5 יח"נ.

12) 4.46 יח"א.

13) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ יח"א.

14) 1.567 יח"א.

15) $\sqrt{2}$ יח"א.

16) א. הישרים מקבילים. ב. $\pi_1:2x+2y-z+7=0\ ,\ \pi_2:y+2z-6=0$.

17) $m=4$ או $m=-\frac{4}{7}$.

18) $l:\underline{x}=(3,-1,1)+k(-5,-2,-4)$.

# שיטות כמותיות

## פרק 25 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות

תוכן העניינים

1. פונקציות של שני משתנים - קווי גובה ..... 289
2. נגזרות חלקיות ..... 293

# פונקציות של שני משתנים – קווי גובה

## שאלות

**1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\frac{y}{x}$ ?
שרטט מפת קווי גובה.

**2)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\ln x+\ln y$ ?
שרטט מפת קווי גובה.

**3)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=x^2+y^2$ ?
שרטט מפת קווי גובה.

**4)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ?
שרטט מפת קווי גובה.

**5)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\ln(x^2-y)$ ?
שרטט מפת קווי גובה.

**6)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=x\sqrt{y}$ ?
שרטט מפת קווי גובה.

**7)** תהי: $u(x,y)=(x+p)(y+q)$ , $x\ge 0$ , $y\ge 0$ פונקציית תועלת של פרט.
הנקודות: $(0,14)$ , $(3,2)$ , $(1,6)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את $p$ ו- $q$. הצב אותם בפונקציית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

**8)** שרטט לפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\ge y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases}$
את קו הגובה: $f(x,y)=1$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נגדיר: $f(x,y)=\begin{cases}3x+y & y>x\\ 4x & y\le x\end{cases}$. הנח כי: $x,y\ge 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך: $f(x,y)=4,12$ עבור הפונקציה הנתונה.

**10)** שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: $f(x,y)=\min\left\{\frac{x}{3},y\right\}$ , $f:R_+^2\to R_+$.

**11)** שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=\min\{3x,y\}$.

**12)** שרטט לפונקציה: $f(x,y)=\min\{y-x^2,x+y\}$,

את קווי הגובה: $f(x,y)=0$ , $f(x,y)=2$.

**13)** נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}x^2-y & x\le 1\\ 2x+y & x>1\end{cases}$.

א. שרטט את קו הגובה: $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי $C$ קו הגובה: $f(x,y)=C$ יהיה קו רציף?
צייר את קו הגובה במקרה זה.

**14)** פונקציית התועלת של פרט הצורך את המוצרים $x$ ו- $y$

היא: $u(x,y)=\begin{cases}y-x^2+4x & x\le 4\\ x-y & 4<x\le 6\\ y-\ln x & 6<x\end{cases}$.

א. שרטט את קו הגובה: $u(x,y)=3$.

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמויות $(4,8)$.
האם הפרט יהיה אדיש במעבר לצריכת הכמויות $(7,9)$?

**15)** שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: $f(x,y)=100-5x-2y$ , $f:R^2\to R$.

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של $f$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=3x-y+3$ .

**17)** שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=x^3-y$ .

**18)** שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$ .

**19)** שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=e^{x-y}$ .

**20)** שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=2\ln x+\ln y$ .

**21)** שרטט לפונקציה: $f(x,y)=(x-y)^2$ ,
את קווי הגובה: $f(x,y)=4$ , $f(x,y)=0$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .
2) $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
3) כל המישור.
4) $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.
5) $y < x^2$
6) $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.
7) א. $p = 1$ , $q = 2$ , $u(x,y) = (x+1)\cdot(y+2)$ ב. $y = \frac{16}{x+1} - 2$
8) ראה סרטון.
9) ראה סרטון.
10) ראה סרטון.
11) ראה סרטון.
12) ראה סרטון.
13) א. ראה סרטון. ב. $C = 1.5$
14) א. ראה סרטון. ב. ראה סרטון. ג. הפרט לא אדיש.
15) ראה סרטון.
16) ראה סרטון.
17) ראה סרטון.
18) ראה סרטון.
19) ראה סרטון.
20) ראה סרטון.
21) ראה סרטון.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציות של שני משתנים – נגזרות חלקיות

## שאלות

1) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$.
חשב את הנגזרת לפי $x$ ואת הנגזרת לפי $y$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=x^5\cdot\ln y$.
חשב את הנגזרת לפי $x$ ואת הנגזרת לפי $y$.

3) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$.
חשב את הנגזרת לפי $x$.

4) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$.
חשב את הנגזרת לפי $x$ ואת הנגזרת לפי $y$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$.
חשב את הנגזרת החלקית לפי $x$ ואת הנגזרת לפי $y$.

6) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$.

7) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
$f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x-y)$.

8) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=xy(x-y)$.

9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
$f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$.

10) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$.

**12)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

**13)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$.

**14)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

**15)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$.

**16)** חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

**17)** חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

**18)** חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

**19)** נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכח כי: $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

**20)** נתון: $f(x,y,z)=e^x\cdot\left(y^2-\frac{1}{z}\right)$.

חשב: $\frac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$.

**21)** נתון: $f(x,y)=\frac{x^2}{\ln y+x}$.

חשב: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**22)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
$f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$ .

**23)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=x^4\cdot\ln y$ .

**24)** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y,z)=xyz$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f_x(x,y)=12x^2-6xy^2+2$ , $f_y(x,y)=-6x^2y+3$

2) $f_x(x,y)=5x^4\ln y$ , $f_y(x,y)=\frac{x^5}{y}$

3) $f_x(x,y)=\frac{y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}\cdot 2x$

4) $f_x(x,y)=2x(2x+3y)+2\left(x^2+y^3\right)$ , $f_y(x,y)=(2x+3y)+3\left(x^2+y^2\right)$

5) $f_x(x,y)=\frac{2x\left(x+y^2\right)-1\left(x^2-3y\right)}{\left(x+y^2\right)^2}$ , $f_y(x,y)=\frac{-3x-3y^2-2x^2y+6y^2}{\left(x+y^2\right)^2}$

6) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=3x^2-6y$ , $f_y(x,y)=3y^2-6x$

סדר שני:

$f_{xx}=6x-0$ , $f_{yy}=6y-0$ , $f_{xy}=0-6$ , $f_{yx}=-6$

7) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=3x^2+3-3y$ , $f_y(x,y)=3y^2+3-3x-6y$

סדר שני:

$f_{xx}=6x$ , $f_{yy}=6y-6$ , $f_{xy}=f_{yx}=-3$

8) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=2xy-y^2$ , $f_y(x,y)=x^2-2xy$

סדר שני:

$f_{xx}=2y$ , $f_{yy}=-2x$ , $f_{xy}=f_{yx}=2x-2y$

9) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=2\left[8xy-3y^2\cdot 1-24x-0+57y\cdot 1+72+0+0\right]$ ,

$f_y(x,y)=2\left[4x^2\cdot 1-3x\cdot 2y-0-54y+57x\cdot 1+0+27+0\right]$

סדר שני:

$f_{xx}=2[8y-0-24]$ , $f_{yy}=2[0-6x\cdot 1-54+0+0]$ ,

$f_{xy}=f_{yx}=2[8x\cdot 1-6y-0+57+0]$

10) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=e^{xy}\left(xy+y^2+1\right)$ , $f_y(x,y)=e^{xy}\left(x^2+xy+1\right)$

סדר שני:

$f_{xx}=e^{xy}\cdot y\cdot\left(xy+y^2+1\right)+(y+0+0)\cdot e^{xy}$ , $f_{yy}=e^{xy}\cdot x\cdot\left(x^2+xy+1\right)+(0+x)\cdot e^{xy}$ ,

$f_{xy}=f_{yx}=e^{xy}\cdot x\cdot\left(xy+y^2+1\right)+(x+2y)\cdot e^{xy}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)\ ,\ f_x(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2y\right)+(2y+2)\cdot e^{x+y}\ ,\ f_{xx}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2x\right)+(2x+2)\cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2x\right)+2y\cdot e^{x+y}$$

**12)** סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=e^{-x^2-y^2}\left(4y-2x^2y-4y^3\right)\ ,\ f_x(x,y)=e^{-x^2-y^2}\left(2x-2x^3-4xy^2\right)$$

סדר שני:

$$,\ f_{xx}=e^{-x^2-y^2}(-2x)\cdot\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(2-6x^2-4y^2\right)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$,\ f_{yy}=e^{-x^2-y^2}(-2y)\cdot\left(4y-2x^2y-4y^3\right)+\left(4-2x^2-12y^2\right)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=e^{-x^2-y^2}(-2y)\cdot\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+(-4x\cdot 2y)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

**13)** סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{1+x^2+y^2}\ ,\ f_x(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\ ,\ f_{xx}=\frac{2x\left(1+x^2+y^2\right)+2x\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{0\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

**14)** סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}\ ,\ f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,\ f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

**15)** ראה סרטון.

**16)** $f_{xy}(1,1)=-2$

**17)** $f_{xy}(1,1)=1$

**18)** $f_{xy}(1,1)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

**19)** הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** $f_z = 4 \ , \ f_y = -2 \ , \ f_x = -1$

**21)** $f_{xx} = \frac{1}{4} \ , \ f_{yy} = \frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16} \ , \ f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{4e}$

**22)** סדר ראשון:

$$f_x(x,y) = 8x - 2xy^2 + 4 \ , \ f_y(x,y) = -2x^2y + 10$$

סדר שני:

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \ , \ f_{yy} = -2x^2 \ , \ f_{xy} = f_{yx} = -4xy$$

**23)** סדר ראשון:

$$f_x(x,y) = 4x^3 \ln y \ , \ f_y(x,y) = x^4 \cdot \frac{1}{y}$$

סדר שני:

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \ , \ f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \ , \ f_{xy} = f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$$

**24)** סדר ראשון:

$$f_x(x,y,z) = yz \cdot 1 \ , \ f_y(x,y) = xz \cdot 1 \ , \ f_z(x,y,z) = xy \cdot 1$$

סדר שני:

$$f_{xx} = 0 \ , \ f_{yy} = 0 \ , \ f_{zz} = 0 \ , \ f_{xy} = f_{yx} = z \cdot 1 \ , \ f_{xz} = y \cdot 1 \ , \ f_{yz} = x \cdot 1$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 26 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

### תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות..... 299
2. חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)..... 304
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות..... 307
4. שימושים של מערכת משוואות לינאריות..... 310

# פתרון מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

**1)** מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{aligned} x+10y&=11 \\ 2x-2y&=0 \end{aligned}$ ב. $\begin{aligned} x-4y&=-7 \\ x-y&=-1 \end{aligned}$ ג. $\begin{aligned} x-y&=0 \\ 2x+y&=3 \end{aligned}$ ד. $\begin{aligned} 2x+y&=4 \\ x+y&=3 \end{aligned}$

**2)** רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{aligned} x+10y&=11 \\ 2x-2&=0 \\ x+y&=3 \end{aligned}$ ב. $\begin{aligned} x-4y+z&=-7 \\ x-y&=-1 \\ x+y+z&=5 \end{aligned}$ ג. $\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ x-z&=0 \end{aligned}$ ד. $\begin{aligned} x&=3 \\ 2x+y&=4 \\ z+t&=8 \end{aligned}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

**3)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

**4)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

**5)** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

**6)** מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

**7)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**9)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

**10)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**11)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

**12)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**13)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

**14)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

**15)** $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$ , $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15** יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **16-27** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

**16)** $$\begin{aligned}2x+3y&=8\\5x-4y&=-3\end{aligned}$$

**17)** $$\begin{aligned}4x+8y&=20\\3x+6y&=15\end{aligned}$$

**18)** $$\begin{aligned}8x-4y&=10\\-6x+3y&=1\end{aligned}$$

**19)** $$\begin{aligned}2x_1-x_2-3x_3&=5\\3x_1-2x_2+2x_3&=5\\10x_1-6x_2-2x_3&=32\end{aligned}$$

**20)** $$\begin{aligned}x+2y+3z&=-11\\2x+3y-z&=-5\\3x+y-z&=2\end{aligned}$$

**21)** $$\begin{aligned}x+2y+3z&=3\\4x+6y+16z&=8\\3x+2y+17z&=1\end{aligned}$$

**22)** $$\begin{aligned}x+3y&=2\\2x+y&=-1\\x-y&=-2\end{aligned}$$

**23)** $$\begin{aligned}4x-7y&=0\\8x-14y&=2\\-16x+28y&=4\end{aligned}$$

**24)** $$\begin{aligned}3x-2y&=1\\-9x+6y&=-3\\6x-4y&=2\end{aligned}$$

**25)** $$\begin{aligned}x+2y-3z+2t&=2\\2x+5y-8z+6t&=5\\6x+8y-10z+4t&=8\end{aligned}$$

**26)** $$\begin{aligned}x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0\end{aligned}$$

**27)** $$\begin{aligned}x+2y+2z&=2\\3x-2y-z&=5\\2x-5y+3z&=-4\\2x+8y+12z&=0\end{aligned}$$

**28)** פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i\end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6) א. $R_1 \to 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \to R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**14)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**15)** $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$ $\qquad$ $F=\mathbb{R}$

**16)** $(x,y)=(1,2)$

**17)** $(x,y)=(5-2t,t)$

**18)** $\phi$

**19)** $\phi$

**20)** $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

**21)** $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

**22)** $(x,y)=(-1,1)$

**23)** $\phi$

**24)** $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

**25)** $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

**26)** $\phi$

**27)** $(x,y,z)=(2,1,-1)$

**28)** א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

## שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי $k$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**1)**
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

**2)**
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

**3)**
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

**4)**
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

**5)**
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

**6)**
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצאו לאילו ערכי $k$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**7)**
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

**8)**
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

**9)**
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצאו לאילו ערכים של $a$ ושל $b$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**10)**
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

**11)**
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

**12)**
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצאו תנאי עבור $a,b,c,d$, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצאו תנאי עבור $b,c,d$, כך שלכל $a$, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

**14)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1\\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצאו עבור איזה ערך של $k$ פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.

ח. מצאו לאיזה ערך של $k$, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

**15)** נתונות המשוואות של 3 מישורים: $\begin{cases} 3x+my=3\\ mx+2y-mz=1\\ -x+mz=-1 \end{cases}$.

בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $m$ שלושת המישורים:

א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).

ב. לא נפגשים באף נקודה.

ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).

ד. האם קיים ערך של $m$ עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** 1. $k \neq 1, k \neq -2$ 2. $k = 1$ 3. $k = -2$

**2)** 1. $k \neq 1, k \neq -2$ 2. $k = -2$ 3. $k = 1$

**3)** 1. $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$ 2. $k = \frac{4}{7}$ 3. $k = -1$

**4)** 1. $k \neq 1, k \neq -0.4$ 2. $k = 1, k = -0.4$

**5)** 1. $k \neq \pm 1, k \neq -2$ 2. $k = \pm 1, k = -2$

**6)** 1. $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$ 3. $k = -1, k = -3, k = 2$

**7)** 1. $k = -1$ 2. $k \neq \pm 1$ 3. $k = 1$

**8)** 2. $k = 3$ 3. $k \neq 3$

**9)** 1. $k \neq 1$ 2. $k = 1$

**10)** 1. $a \neq 2$ 2. $a = 2, b \neq -3$ 3. $a = 2, b = -3$

**11)** 2. $b \neq 2.5$ או $a \neq -6$. 3. $a = -6, b = 2.5$

**12)** 2. $a = 2, b \neq 2$ 3. $a = 2, b = 2$ או $a \neq 2$.

**13)** א. $ab + 2c \neq d$ ב. $b = 0, c = 1.5, d = 3$

**14)** א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k \neq -1$ , $k \neq 2$ . 2. $k = -1$ 3. $k = 2$ ד. $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k = \pm 2$ ו. $k = -2$ ז. $k = 2$ , לא. ח. $k = -2$

**15)** א. $m \neq 0, -2, 3$ ב. $m = -2, 3$ ג. $m = 0$ ד. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

## שאלות

**1)** פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**2)** פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**3)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכי $m$, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.

ב. עבור ערך $m$ שנמצא ב-א, מצאו את ערכי $k$, עבורם למערכת פתרון.

ג. עבור ערכי $m, k$ שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**4)** נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.

ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.

ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.

ד. לכל $a$ ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.

ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** נתונה המערכת ההומוגנית $\begin{cases} 3x+my=0 \\ mx+2y-mz=0 \\ -x+mz=0 \end{cases}$.

יהי $W$ אוסף הפתרונות של המערכת.

עבור אילו ערכים של הקבוע $m$ (אם בכלל) $W$ הוא:

א. נקודה (מצאו נקודה זו).

ב. ישר (מצאו ישר זה).

ג. מישור (מצאו מישור זה).

**6)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$.

נסמן ב-$A'$ את הצורה המדורגת של $A$.

ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.

מצאו את $A$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

**2)** למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.

למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0,0,0)$.

**3)** א. $m=-3$ ב. $k=-2$ . ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.
פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(t,t,t)$.

**4)** א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
ז. הטענה לא נכונה.

**5)** א. $m\neq 0,-2,3$ . הנקודה היא $(x,y,z)=(0,0,0)$.
ב. אם $m=0$ נקבל ישר $\underline{x}=t(0,0,1)$ . אם $m=2$ נקבל ישר $\underline{x}=t(2,-1,1)$,
אם $m=3$ נקבל ישר $\underline{x}=t(3,-3,1)$.
ג. אין ערכים של $m$ עבורם נקבל מישור.

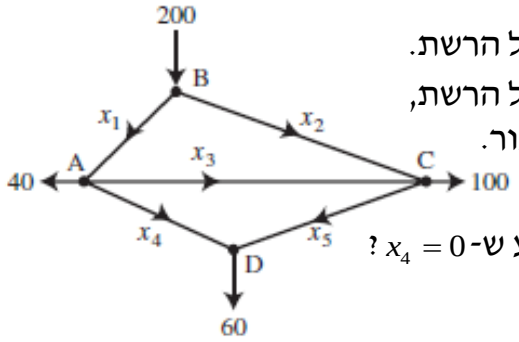
**6)**
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\4&8&12&16\\-3&-6&-9&-12\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושים של מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

**1)** באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



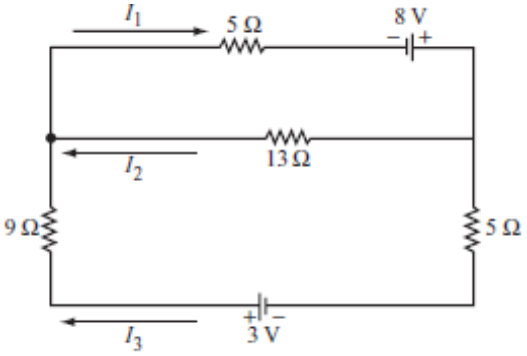

א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו $x_4$ סגור.

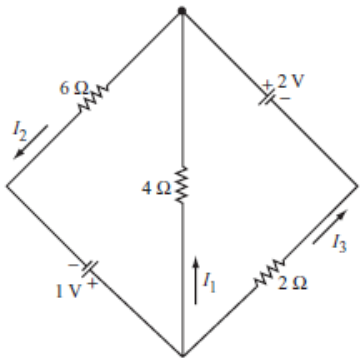
ג. מהו הערך המינימלי של $x_1$ , אם ידוע ש- $x_4 = 0$ ?

בשאלות **2-3** מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):

**2)**




**3)**




*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.**


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $x_3$ ו- $x_5$ חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$ , $x_2=100-x_3+x_5$ , $x_4=60-x_5$ .

ב. $x_3$ חופשי. $x_1=40+x_3$ , $x_2=160-x_3$ , $x_4=0$ , $x_5=60$ . ג. 40.

2) א. $I_1=\frac{255}{317}, I_2=\frac{97}{317}, I_3=\frac{158}{317}$

3) $I_1=-\frac{5}{22}, I_2=\frac{7}{22}, I_3=\frac{6}{11}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 27 - דטרמיננטות

### תוכן העניינים


1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג ..... 312
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n ..... 317
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות ..... 322
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות ..... 324
5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה ..... 325
6. שימושי הדטרמיננטה ..... 330
7. תרגילי תיאוריה מתקדמים ..... 331

# חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

## שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

**1)** א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

**2)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

**3)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

**4)** $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**5)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

**6)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

**8)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

**9)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

**10)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

**11)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

**13)** $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

**14)** $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

**15)** $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**16)** הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

**17)** הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

**18)** חשבו: $\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**19)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות $A$ ו-$B$ מסדר $n$ הנבדלות ביניהן רק בשורה ה-$k$ $(1 \le k \le n)$.
תהי $C$ מטריצה הזהה למטריצות $A$ ו-$B$ אך נבדלת מהן בשורה ה-$k$, שם היא שווה לסכום השורה ה-$k$ של $A$ והשורה ה-$k$ של $B$.
הוכיחו כי $|A|+|B|=|C|$.

ב. חשבו: $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$.

## תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. $-1$
2) א. $-1$ ב. $-3$ ג. $-14$
3) א. 24 ב. 234 ג. $-300$
4) 9
5) 6
6) א. 0 ב. 0 ג. 3
7) א. 24 ב. 44 ג. 104
8) 120
9) 114
10) 6
11) פתרונות באתר : www.GooL.co.il
12) פתרונות באתר.
13) $-8$
14) 16
15) 9
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) $(k-1)^4(k+4)$
19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

# חישוב דטרמיננטה כללית מסדר $n$

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,\dots,a_{n-1}$, המטריצה הבאה

הפיכה: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$ ?

**2)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של $n$ עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- $n$ ?

**3)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\ne 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}.$$

**4)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

**5)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\ne j\end{cases}.$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

**7)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

א. $a_{ij} = \min\{i, j\}$

ב. $a_{ij} = Max\{i, j\}$

**8)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \ or \ j=1 \end{cases}$.

חשבו את $|A|$.

**9)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \ or \ j=1 \end{cases}$.

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ המטריצה הפיכה.

**10)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left( a_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, \ j=1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, \ i=1 \\ x & else \end{cases} \right).$$

**11)** תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i=j \end{cases}$.

חשבו את $D_n = |A_{n\times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.

**12)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

**13)** נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:

מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה $B$.

חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

**14)** חשבו את $D_n=\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & else \end{cases}$.

**15)** חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} 2 & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} i & i+j=n+1 \\ 2 & else \end{cases}$.

**16)** חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} a & & & b \\ & & b & \\ & \iddots & & \\ b & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} b & i+j=n+1 \\ a & else \end{cases}$.

**17)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. $A$ הפיכה אם ורק אם $a_0\neq 0$.

2) א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

3) $|A|=n!$

4) $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

5) $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

6) $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

7) א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

8) $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

9) $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

10) $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

11) $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

12) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

13) $$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n \text{ odd}\end{cases}$$

14) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\end{cases}$$

15) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n\ even\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n\ odd\end{cases}$$

16) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ odd\end{cases}$$

17) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n\ even\end{cases}$$

18) $$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ even\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ odd\end{cases}$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

## שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי $A$ ו-$B$ מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבו:

**1)** א. $\left|ABA^{-1}B^{T}\right|$ ב. $|4A^{2}B^{3}|$

**2)** א. $|-A^{-2}B^{T}A^{3}|$ ב. $|-2A^{2}A^{T}adjB|$

**3)** נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

**4)** נתון: $A$ ו-$B$ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

**5)** נתון: $A$ ו-$B$ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^{2}-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|, |B|$.

**6)** הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

**7)** נתון כי $A$ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

**8)** נתון: $A$ מטריצה מסדר $n$, $|A|=128$, $2AB=B^{T}A^{2}$, ו-$B$ הפיכה.
מצאו את $n$.

**9)** נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2,\ \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

## תשובות סופיות

**1)** א. 4 ב. $2^{13}$

**2)** א. $-8$ ב. $-2^{11}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** $\frac{81}{32}$

**5)** $|A|=18,\ |B|=-2/3$

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** 7

**9)** $4^n$

**10)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# כלל קרמר

## שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

**1)** $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

**2)** $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

**3)** $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

**4)** נתונה מערכת המשוואות: $\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$.

א. עבור איזה ערך של $k$ למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של $k$ למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים $k$ עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

**5)** יהיו $A,B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

## תשובות סופיות

**1)** $x=1,\ y=2$

**2)** $x=1,\ y=1,\ z=2$

**3)** $x=y=z=t=1$

**4)** א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

**5)** א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את הצמודה הקלסית $adj(A)$, ובעזרתה את $A^{-1}$ :

**1)** $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

**2)** $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$

**3)** $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

**4)** נתון: $A=\begin{pmatrix}-9&26&-1&14&10\\13&-7&87&4&0\\71&35&3&0&0\\17&2&0&0&0\\2&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. חשבו: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשבו: $(A^{-1})_{1,5}$.

**5)** א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה $A$ שווה ל-$\pm1$, כאשר כל איברי $A$ ו-$A^{-1}$ הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם $|A|=1$ וכל איברי $A$ הם מספרים שלמים, אזי כל איברי $A^{-1}$ גם הם מספרים שלמים.

**6)** נתון ש-$A$ מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.
הוכיחו ש-$A^{-1}$ משולשית תחתונה.

**7)** נתון ש-$A$ הפיכה.
הוכיחו שגם $adj(A)$ וגם $A^T$ הפיכות.

**8)** נתון כי $A,B$ הפיכות ו-$C,D$ לא הפיכות.
האם המטריצות הבאות הפיכות?

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. $AD$ ד. $CD$ ה. $AB$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** מצאו את ערכי $k$ עבורם המטריצה $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ לא הפיכה.

**10)** ידוע ש- $A, B$ מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.

ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.

ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.

ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

**11)** נתונות שתי מטריצות $A_{3\times5}$, $B_{5\times3}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $|AB| = |BA|$

ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$

**12)** אם $B$ מתקבלת ממטריצה $A_{3\times3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,
אז $|adj(A)\cdot B|$ שווה ל:

א. $4^3|A|^3$

ב. $4^3|B|^3$

ג. $4|B|^3$

ד. $4|A|^3$

**13)** נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $|A| = 4$

ב. $A$ הפיכה.

ג. $adj(A) = 0$

ד. $|A| = 0$

**14)** אם $G$ היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית $A$, אז:

א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.

ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.

ג. ייתכן ש- $\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

**15)** תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש- $a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$

ב. $A$ הפיכה.

ג. $adj(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n=4$, אז $|Adj(A)|>214$.

**16)** תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 4$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $rank(A)=n-2$, אז בהכרח $adj(A)=0$.

ב. אם $A$ אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj(A)=0$, אז בהכרח $A=0$.

**17)** $A$ מטריצה ריבועית, $B$ מתקבלת מ- $A$ ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,
אז $adjB$ מתקבלת מ- $adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**18)** תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|Adj((-1+i)A)|=i$.

חשבו $|\det(A)|$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**19)** נתון כי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $A$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj\left(A^{-1}\right)=\left(Adj(A)\right)^{-1}$

ג. $\left|Adj(A)\right|=|A|^{n-1}$

## תשובות סופיות

1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

4) א. 240 ב. 0.5

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.
ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

9) אם ורק אם $k=0$.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) ד

13) שאלת הוכחה.

14) ד

15) ד

16) שאלת הוכחה.

17) ד

18) $2^{\frac{-5}{2}}$

19) שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושי הדטרמיננטה

## שאלות

**1)** א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

## תשובות סופיות

**1)** א.1. 13. א.2. 14 ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילי תיאוריה מתקדמים

## שאלות

**1)** אם $B$ מתקבלת ממטריצה $A$ $3\times3$, ע"י כפל העמודה הראשונה ב-7,
אז $\left|adj\left(A\right)B\right|$ היא:

א. $\left|A\right|^3$

ב. $\left|B\right|^3$

ג. $\left|A\right|\left|B\right|^2$

ד. $\left|A\right|^2\left|B\right|$

**2)** $A,B$ מטריצות ריבועיות מאותו סדר, $B\neq0$, אז:

א. אם $AB=0$, אז $A=0$.

ב. אם $AB=0$, אז $\left|A\right|=0$.

ג. אם $\left|AB\right|=0$, אז $A=0$.

ד. אם $\left|AB\right|=0$, אז $\left|A\right|=0$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**3)** $B$ מטריצה $5\times3$, $A$ מטריצה $3\times5$, אז בהכרח:

א. $\det\left(AB\right)=\det\left(BA\right)$

ב. $rank\left(AB\right)=rank\left(BA\right)$

ג. $rank\left(AB\right)\neq rank\left(BA\right)$

ד. $adj\left(AB\right)\neq adj\left(BA\right)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**4)** $A$ מטריצה ריבועית, $B$ מתקבלת מ-$A$ ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 7,
אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 7.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 7.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 7.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 7.

ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** יהיו $A,B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$. אז בהכרח מתקיים:

א. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח $|A|=0$.

ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ד. אם למערכת ההומוגנית $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד,
אז השורות של $A$ תלויות ליניארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**6)** תהיינה $A,B$ מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 4$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $rank(A)=n-2$, אז בהכרח $adj(A)=0$.

ב. אם $A$ אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj(A)=0$, אז בהכרח $A=0$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

**7)** תהא $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 3$, כך ש- $a_{ij}=i+j-1$.
אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=2$

ב. $|A|=0$

ג. עמודות $A$ בלתי-תלויות ליניארית.

ד. $adj(A)=0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**8)** תהא $A$ מטריצה ריבועית מסדר 5, ונניח ש- $|adj((-1+i)A)|=i$,
אז **הערך המוחלט של הדטרמיננטה** שווה ל:

א. $\sqrt[4]{2}$

ב. $-3i$

ג. $0$

ד. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נניח $A,B$ מטריצות מסדר גודל $n\times n$ המקיימות $A^2-2AB=I_n$.
אז בהכרח מתקיים:
א. $B$ הפיכה.
ב. $|A|=0$
ג. למערכת $ABx=0$ פתרון יחיד.
ד. $AB=BA$
ה. אף תשובה אינה נכונה.

**10)** אם $G$ היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית $A$, אז:
א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.
ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.
ג. ייתכן ש-$\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

**11)** תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש- $a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$.
לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:
א. $|A|=n!-1$
ב. $|A|\neq 0$
ג. עמודות $A$ בלתי-תלויות ליניארית.
ד. $adj(A)=0$
ה. אף תשובה אינה נכונה.

**12)** יהיו $A,B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$. אז בהכרח מתקיים:
א. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-$|A|=0$.
ב. אם קיים פתרון שונה מ-$0$ למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-$0$.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-$A^2=0$.
ד. אם למערכת ההומוגנית $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז השורות
של $A$ בלתי-תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) ד | 2) ב | 3) ד | 4) ד | 5) ב |
| 6) א | 7) ב | 8) ד | 9) ד | 10) ד |
| 11) ג | 12) ד | | | |


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©